


253
7 K
23

CORSO

DI

GEOMETRIA

ELEMENTARE, E SUBLIME

VOLUME I°

I PRIMI SEI LIBRI DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE



ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

DI

EUCLIDE



EMENDATI, E RESTITUITI AL LORO PRISTINO STATO

DAL

CAV. V. FLAUTI

Professore di Analisi sublime nella R. Università degli studj di Napoli, e membro della *giunta* di pubblica istruzione pel Regno — Segretario della R. Accademia delle scienze, socio ordinario del R. Istituto d' Incoraggiamento, e della *Pontaniana*; onorario delle Accademie di Berlino, Copenaghen, Modena, *ec. ec.*



DECIMASETTIMA EDIZIONE





Ille in Geometria se profecisse sciat, cui Euclides, Archimedes, Apollonius valde placebunt.

IN NAPOLI

Nella stamperia privata dell' autore

1843.





PRELIMINARE

AGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

Siquidem in omni scientiarum genere, nosse quibus gradatim incrementis adoleverint jucundissimum est, et ad rerum ipsarum intelligentiam plurimum confert. — Horsley — *in Arith. univ. Newt.*

Il volere in ogni scienza alle prime invenzioni rimontare, per determinarne l' origine, è pruova assai difficile, e l' opera torna ben sovente invano. Ciò rimane abbastanza dimostrato dagli sforzi inutili di coloro, che han cercato fissar l' epoca mal sicura delle prime mosse dello spirito umano, per giugnere a fondare alcune verità geometriche semplicissime, o piuttosto per ridurre a principj teoretici quegli usi pratici, che già rinvenuti erano per la misura delle grandezze, e facean bisogno nella vita civile. I germi di ogni scienza, ed arte sono appunto dal bisogno fecondati; ed essi possono perciò nelle menti di più uomini ad un sol tratto svilupparsi, e presentarsi loro in una maniera informe, e senza nesso vicendevole. Per la qual cosa, mal si apporrebbe al vero chi dicesse: il tale ne fu l' inventore: questa fu la circostanza felice, che a fondar la scienza il condusse; la quale da un certo tempo ad un altro egli solo conobbe.

Ma se la storia non può somministrarci, che mere conghietture, e forse veri sogni su i primordj delle scienze, essa può bastevolmente chiarirci dell' altra epoca, in cui queste ridotte in sistema cominciarono ad essere scritte, ed insegnate; e da questa in poi convien seguire a passo a passo gli andamenti dello spirito umano, contribuendo ciò non poco alla migliore intelligenza delle scienze medesime, e riuscendo piacevol cosa conversar con coloro, che furono i primi a sapere. Convinti di ciò non andremo cercando l'origine della Geometria in Egitto [1], nè in altro luogo, poco importando conoscere per qual ragione fu inventata; se Talete recossi a Menfi per impararla, o veramente già erane istrutto, bastando per lui, che fosse stato lo scopritore di molte importanti geometriche verità. Noi cercheremo solamente a chi per ventura si dee la gloria di averla primamente ridotta in sistema scientifico; quale avanzamento que' primitivi cultori prepararono alla scienza mediante le loro opere, accertando l'epoca fortunata in cui questo avvenne.

È fuori di ogni dubbio, che la Geometria dovè esser scientificamente trattata nella scuola di Pitagora, e che alcuna istituzione geometrica dovè a quell' epoca incominciarsi a scrivere, e ad insegna-

[1] Su tal proposito abbiamo di che rimanere ampiamente paghi ne' discorsi premessi a parecchi Elementi di Geometria. Ma fia ben fatto, per chi amasse meglio istruirsene, riscontrare la dottissima *Storia delle Matematiche* del Montucla, nella *part. 1. lib. II. n. 3.*

re. Un argomento irrefragabile di ciò, quando anche non esistessero quelle notizie informi, che ci sono state conservate da Proclo, lo abbiamo nel sapere, che Aristeo seniore, il quale succedè in questa scuola al fondatore di essa [2], trattò delle *Sezioni Coniche*, e de' *Luoghi Solidi* [3], dalle quali opere evidentemente rilevasi, che la scienza era già adulta, e che altre opere geometriche avevano dovuto ad esse precedere. Intanto niuna di queste è a noi pervenuta; nè perciò possiamo sapere il sentiero geometrico, che condusse Euclide [4] alla compilazione di un modello perfettissimo, ed unico di scienza geometrica conosciuto col nome di *Elementi*.

---

[2] Che Aristeo Seniore sia stato un filosofo Pitagorico, ed anteriore al divino Platone; si trova abbondevolmente dimostrato in una mia dissertazione intitolata: *Esame geometrico dell' antico problema della trisezione dell' angolo*, più volte pubblicata anche nelle note a talune edizioni degli *Elementi di Trigonometria*. (Veggasi pure la *storia delle Sezioni Coniche*, premessa al terzo volume di questo *Corso*).

[3] Sebbene queste due opere fossero perdute, purtuttavia le indicazioni, che ne ha conservate Pappo Alessandrino, e la dotta divinazione, che dietro queste diede il Viviani di quella intitolata *Locorum Solidorum libri V.*, guarentiscono la profonda dottrina geometrica, che in esse contenevasi.

[4] Noi ignoriamo la patria di Euclide autore degli Elementi di Geometria: quello, che solamente ci rapporta Proclo si è, ch' egli visse ne' tempi di Tolomeo I., e quindi che fu posteriore a coloro, che convissero con Platone: *Fuit autem iste vir primi Ptolemaei temporibus....... Platonis igitur familiaribus iunior quidem est, antiquior vero Eratosthene et Archimede*. Egli è dunque ben diverso dall' Euclide dialettico nativo di Megara, che lo precedè di circa un secolo, e col quale taluni erroneamente lo hanno confuso. Al qual proposito potrà anche riscontrarsi ciò, che ne dice il Gregory, nel principio della prefazione al suo Euclide.

Il tempo però, che ha distrutte queste tracce, per le quali lo spirito umano era giunto all' apice della perfezione in tal argomento, ci ha conservata la memoria di quegli uomini benemeriti, che le avevano segnate: ed è giusto, che ancor noi gli facessimo conoscere.

Il primo di costoro, di cui abbiamo notizia, è Ippocrate Chio, famoso per le sue *lunule*; e tutto quello, che ce ne vien detto da Proclo si è, ch' egli ordinò i molti teoremi, che Talete, Pitagora, ed altri prima di lui avevano scoperti; e fu perciò il primo autore, e scrittore di Elementi [5]. Pare ancora, ch' egli oltre all' aver raccolte tutte le verità geometriche da quelli scoperte, le avesse eziandio corredate di opportune dimostrazioni. Il secondo di questi scrittori fu il geometra *Leone*, di cui altro non sappiamo, se non, che egli e 'l suo maestro Neoclide molto aggiunsero alle verità rinvenute prima di loro, sicchè potè *Leone* comporre più accuratamente gli Elementi di Geometria; e che aggiunse alla soluzione de' problemi quella parte, che chiamasi *determinazione*, la quale mostra in quali casi il problema sia possibile, in quali altri im-

---

[5] *Primus namque eorum qui commemorantur, Hippocrates, Elementa conscripsit: Plato autem cum his successisset, fecit tum Geometriam ipsam, tum etiam caeteras Mathematicas disciplinas maximum suscepisse additamentum, propter ingens quod in ipsis adhibuit studium ..... Hoc autem tempore fuit et Leodamas Thasius, et Architas Tarentinus, et Theaethetus Atheniensis, a quibus theoremata aucta sunt, ad peritioremque pervener e constitutionem.*

possibile [6]. Dopo lui Teudio di Magnesia, che Proclo ci rappresenta come un uomo sommo nelle Matematiche non solamente, ma benanche in tutto il resto della Filosofia, scrisse pure Elementi geometrici, e generalizzò le particolari invenzioni prima di lui fatte; che perciò vien riputato il terzo nell' ordine de' padri della Geometria [7]. Il quarto tra questi fu Ermotimo Colofonio, che stabilì, come ci vien riferito, una nuova disciplina geometrica elementare [8]; e questa novità non potè certamente consistere in altro, che nella diversa maniera di ordinare, e dimostrare le verità geometriche nel suo libro contenute. Finalmente tutte qneste opere prepararono la strada ad Euclide, per comporre i suoi *Elementi*, ne'quali comprese molte

---

[6] *Leodamante autem iunior Neoclides fuit, huiusque discipulus Leon, qui ad ea quae superiores excogitaverant multa addiderant. Ita ut Leon Elementa quoque construxerit accuratius, et propter multitudinem, et propter usum eorum, quae in ipsis ostenduntur; et determinationem invenerit, quando scilicet quod quaeritur problema possibile sit, et quando impossibile. Eudoxus autem Cnidius Leonte quidem paulo iunior, sodalis vero Platonis, primus multitudinem eorum theorematam quae universalia appellantur, locupletiorem reddidit* ... Ad Eudosso si attibuisce l' importante teorica della proporzione delle geandezze, da Euclide sì micabilmente esposta nel libro V.

[7] *Theudius autem Magnes, tum in mathematicis disciplinis, tum etiam in reliqua philosophia praecellere visus est. Elementa namque construxit egregie, multaque particularium magis universalia fecit.* — Par dunque, che l' opinione di Proclo sia, che questo geometra fosse stato il peimo a trattae gli Elementi in una maniera compiuta, e rigorosa.

[8] *Hermotimus autem Colophonius, quae ab Eudoxo, et Theaeteto prius edita fuerant, uberiora fecit, compluraque invenit Elementa, locosque nonnullos conscripsit.*

delle invenzioni di Eudosso, e di Teeteto; e con dimostrazioni solidissime, convalidò molte verità geometriche, che da' loro inventori, e dagli altri allegati scrittori elementari erano state con meno di accuratezza trattate [9].

Parve che qui lo spirito umano si riposasse. La ragion dell' uomo fu paga di veder ridotta la scienza in un sistema, del quale era impossibile immaginare altro migliore; e senza più occuparsi i geometri greci della perfazione degli Elementi già ottenuta, si rivolsero con avvedutezza a far progredire la Geometria. Così operarono que' nostri avveduti maestri, i quali pretesero acquistare una solida gloria, e promuovere l' avanzamento delle scienze. La Grecia non produsse più opere geometriche elementari, contenta de' soli *Elementi* di Euclide [10]

Questo debito rispetto, ch' ebbero di tale opera i geometri greci, passò coll' opera stessa, nel risorgi-

---

[9] *Non multo autem his iunior Euclides est, qui Elementa collegit, et multa quidem construxit eorum, quae ab Eudoxo, multa vero perfecit eorum, quae a Theaeteto reperta fuerant. Ea praeterea, quae a prioribus molliore brachia ostensa fuerant, ad eas redegit demonstrationes, quae nec coargui, nec convinci possunt.*

[10] Che in Grecia non sieno comparsi altri Elementi dopo quelli di Euclide, si deduce chiaramente dal vedere, che Pappo il quale ci ha tramandata notizia di coloro, che precedettero quel geometra in questo genere difficilissimo di lavori geometrici, nulla poi dice di altri, che lo avesser seguito; e pur di questi poteva egli averne miglior contezza, che de' primi. Ciò debbe intendersi però di nuovi, e dotti ordinatori di tali Elementi, e non già di copiatori di quelli da altri prodotti, de' quali è probabile, che ve ne sia stati, come l' è a' dì d' oggi; ma di questi il tempo ha presa quella ragione, che doveva.

mento delle scienze, in Italia presso i più distinti matematici, de' quali questo felice tratto di terra fu assai fecondo; e dall' Italia passando le scienze geometriche presso le altre nazioni, queste l' accolsero pure col rispetto stesso. Tutta l'Europa fu addottrinata dagli Elementi di Euclide, ed essa produsse sommi uomini, alle cui rispettabili fatiche or dobbiamo tutta quella massa di sublimi cognizioni matematiche, che fa veramente meraviglia. Fu solamente in Francia, che un tal libro, ammiratovi grandemente da' più distinti matematici, di cui essa non mancò di aver la sua parte, incontrò novatori in soggetti di minore scienza; ed ivi non pochi *Elementi* scritti con metodo diverso dall'Euclideo, si videro comparire, succedendosi nelle scuole con vita brevissima gli uni agli altri. E quest' esempio, non poteva essere a meno, che, principalmente con l' occupazione dello straniero, non trovasse proseliti in Italia, tra alcuni meno intelligenti, che per un vano desiderio di divenir autori, non conoscendo la propria imperizia, e molto meno atti a distinguere il merito di Elementi geometrici, nè avvezzi alla strettezza di nesso, e di ordine, che vi si dee osservare, si diedero a tradurre, ed insegnare, con grave danno della gioventù, che s'introduce alle Matematiche, qualche istituzione pubblicata oltremonti, con poco sapore geometrico, o altra ancor peggiore ne produssero di proprio conio. Ma ciò non derogò mai al nostro saggio

antico costume di coltivare, ed insegnare gli Elementi di Euclide, come il dimostreranno più appresso le comuni istituzioni, che contemporaneamente da' matematici distintissimi ne furon prodotte, e che ebbero, ed hanno ancor luogo in tutte le scuole italiane.

Dopo questa breve digressione, ritorno agli Elementi di Euclide, per esporre il piano, ch'ebbe il loro autore nel comporli: il che è necessario non solamente per istabilire alcuni punti importantissimi di storia matematica; ma eziandio per dare a'giovani contezza di alcuni libri, che formano parte di quest' opera, e che ora non vengono più insegnati, de' quali però conviene avere un' idea. Recherò inoltre un saggio delle principali edizioni di Euclide in greco, ed in latino; parlerò del loro merito, o de' loro difetti, e de' principali comentarj, che sopra essi sono stati fatti. Esporrò finalmente gli autorevoli giudizj de' principali matematici antichi, e moderni intorno ad Euclide. Lo spirito umano è così fatto, che ancor dov'ei può chiaramente vedere ama esser guidato, e vuol sentire ciò, che altri ne pensino; ed affidarsi al loro giudizio, laddove uomini di dottrina, ed esperienza somma venghino universalmente riputati.

ESPOSIZIONE

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

Gli Elementi di Euclide si veggono distribuiti in tredici libri. I due primi trattano della natura de' triangoli, e de' parallelogrammi, e delle loro proprietà, colle verità, che ad essi corrispondono, ed i problemi, che gli riguardano. Il terzo tratta del cerchio; ed il quarto di alcune figure regolari, che in esso, ed intorno ad esso descriver si possono, co' metodi della elementare Geometria. Nel quinto si fissano i principj, e si sviluppano i rapporti della grandezza in generale; e questo libro, che non appartiene esclusivamente alla Geometria elementare, è un' immensa miniera di ripieghi geometrici, onde risolvere gran numero di ardui problemi, e dimostrar tante verità, che altramente invano si tenterebbero. Esso forma in somma la base de' metodi di risoluzione impiegati dagli antichi nello scioglimento de' problemi, e nella dimostrazione de' teoremi, ed il cardine principale di tutte le scienze matematiche pure, e miste. E nel sesto libro trovansi applicate ai rapporti speciali delle diverse figure piane rettilinee fra loro, le teoriche generali esposte già nel quinto; per mezzo delle quali moltissimi problemi, che riguardano tali figure, si risolvono agevolmente.

Esaurita in tal modo questa parte di Geometria,

che riguarda le figure piane, parrebbe ragionevole, che Euclide avesse dovuto passare ad occuparsi delle stesse inchieste per le solide. Non per tanto queste altre teoriche, sì nell' esemplar greco di Teone, come nelle versioni arabe, e presso tutti gli antichi, ed i moderni espositori degli Elementi, trovansi comprese nell' undecimo, duodecimo, e tredicesimo libro. Tra quelli, e questi ottengon luogo altri quattro libri, i primi tre de' quali trattano in ordine di alcune teoriche generali, ed astratte, concernenti la quantità discreta, cioè i numeri. Questi libri, che oggidì dopo l' invenzione della volgare Aritmetica, e della speciosa, da pochi si leggono, contengon pure dottrine assai profonde, ed utili teoremi per coloro, che d' inchieste aritmetiche si dilettano. Ed invero si trovano in essi non poche verità dimostrate, e risoluti alcuni problemi in una maniera ancor da preferire a quella, che taluni valentissimi analisti ebber poscia nelle loro opere tenuta, valendosi costoro delle grandi facilitazioni, che suole in ciò l' Analisi moderna presentare. Nel decimo libro poi si ragiona estesamente delle quantità *incommensurabili*, ed *irrazionali*, e con tale profondità, da non lasciar dubitare, che per ventura, con tutt' i moderni metodi, sarebbe pur difficile a chicchessia il poter con pari precisione, chiarezza, e brevità fare altrettanto. Eccoci però a dare di questi libri un' indicazione alquanto più particolareggiata.

Il settimo libro contiene in quarantuna proposizioni, trentacinque teoremi, e sei problemi: in quelli si espone la natura de' numeri *primi*, e recansi molte proprietà riguardanti le numeriche relazioni, analoghe a quelle, che nel libro quinto eransi per la grandezza in generale dimostrate. E nella proposizione sedicesima, con una precisione desiderata in qualche moderno analista, si dimostra, che: *Non varia il prodotto di due numeri, sia che l' un d' essi per l' altro si moltiplichi, o questo per quello* [11]. I problemi poi di un tal libro hanno per obbietto: *Rinvenire la massima comune misura di due, o più numeri dati non primi tra loro*. E questa ricerca è condotta a fine in un modo analogo a quello, che adoperiamo nella nostra volgare Aritmetica, e nella speciosa. Oltre ciò vi si tratta: *Della minima comune misura -- del determinare tra tutt'i numeri, che hanno un dato rapporto quelli, che sono primi tra loro*; e finalmente *di ritrovare un numero minimo, che abbia parti date*. L' ottavo libro comprende venticinque teoremi, e due problemi. Ne' teoremi Euclide racchiude le ricerche su' numeri primi, e minimi; espone altre singolari proprietà sulla proporzione de' numeri, quelle de' numeri *piani*, e *solidi*, e de' numeri *quadrati*, e *cubi*, le definizioni de' qua-

[11] Può vedersi una tal dimostrazione compendiata, nella *Introduzione al vol. I. del nostro Corso di Analisi elementare, e sublime.*

li erano state da lui poste innanzi al libro settimo. E tra questi teoremi merita principale attenzione il terzo, ove si dimostra, che: *I numeri piani hanno tra loro una ragion composta dalle ragioni de' lati*. Da che trasse il Simson sicuro argomento per conchiudere, non esser di Euclide la consueta definizione della ragion composta, che trovasi ordinariamente tra quelle del libro sesto [12]. Ne'due problemi poi si propone egli di: *Rinvenire numeri minimi continuamente proporzionali, la ragion de' quali sia data: e numeri minimi in continua proporzione, che serbinsi ragioni date d' ogni maniera, tra numeri anche minimi.* Il nono libro annovera trentasei proposizioni, cioè trentaquattro teoremi, e due problemi. Ne'primi si prosegue ad esporre la natura de' numeri *quadrati*, e *cubi*, ed alcune altre proprietà della proporzione de' numeri *primi*. Degno della massima avvertenza è l'ultimo tra questi, ove si dimostra, che: *Se dall' unità in poi prendansi numeri continuamente proporzionali in ragion doppia, finchè il numero risultante dalla somma di tutti questi termini sia primo: cotal somma moltiplicata per l' ultimo di que' numeri proporzionali, darà per prodotto un numero perfetto, cioè uguale a tutte le sue parti prese insieme* [13]. La qual verità, che fa molto o-

---

[12] *Vegg. la nostra nota alla def. A del lib. V.*
[13] *Def. 22. VII.*

nore al geometra antico, che ne fu l' inventore, trattata anche co' nostri mezzi attuali, ben dice il Montucla, esige un artifizio particolare [14]. I due problemi poi di questo libro hanno per obbietto: *Determinare se possa rinvenirsi dopo due numeri dati il terzo proporzionale, o il quarto dopo tre*. Il decimo libro finalmente accoglie centodiciassette proposizioni. Quivi si espongono, in novantatre teoremi, i caratteri delle quantità *incommensurabili*, e delle *commensurabili* [15]: vi si dimostra fra le altre cose, che il rapporto di queste sia esprimibile in numeri, e non così quello delle prime; e lo stesso affermasi pe'*quadrati*, e *cubi*, che da tali quantità si formano. Egli quindi deduce da ciò le seguenti nobili verità, cioè: *Che le linee rette commensurabili in lunghezza lo sono anche in potenza*, cioè ne' quadrati, e ne'cubi: ma che al contrario, *quelle linee rette, che sono commensurabili in*

---

[14] Il Montucla dà cotal ricerca come problema di Euclide.

[15] Il concetto di tali grandezze viene chiaramente da Euclide stabilito nelle definizioni 1, e 2 del libro X°; e nelle seguenti si espongono i caratteri delle differenti specie, e de' diversi ordini d' incommensurabili, e delle quantità così dette *razionali*, ed *irrazionali*. L' esistenza di queste grandezze in Geometria, che vien da Euclide comprovata nel presente libro, rende nullo ogni concetto aritmetico per istabilire l'uguaglianza delle ragioni; e mostra la necessità di ricorrere per tale oggetto all' espediente sublime, ed ingegnoso degli *equimoltiplici* adottato dal sagace Euclide nel libro V° degli Elementi; e starà come caratteristica di superficialità, e d' ignoranza per coloro, che credendolo superfluo il tralasciano, ricorrendo per la teorica delle ragioni, e proporzioni al concetto di sopra indicato.

potenza , non lo sono sempre in lunghezzn . In oltre , che : *Le linee rette , incommensurabili in lunghezza, non lo sono sempre in potenza : quelle poi, che sono incommensurabili in potenza, debbono esserlo anche in lunghezza* [16]. In seguito passa a trattare delle quantità irrazionali [17], ed a ricavar quindi dalla teorica sovr'esse stabilita novelle verità per le quantità incommensurabili. Tante, e tali sono in somma le cose da Euclide in questo libro dimostrate , che farebbe ecceder di molto i limiti di una semplice indicazione il volerle quì minutamente notare. Ci limiteremo perciò ad osservar solamente,ch'egli chiude un tal libro col dimostrare,che: ***La** diagonale, ed il lato del quadrato,sono incommensurabili tra loro* , adoperando un artifizio veramente maraviglioso, facendo , cioè , vedere , che a potersi esprimere un tal rapporto per quello di un numero ad un altro bisognerebbe , che un numero fosse nel tempo stesso pari ed impari ; il che è impossibile [18] . Contiene in oltre tal dimostrazione di

[16] *Cor. prop.9.* X.

[17] *Teor. 17, e segg.*

[18] A questo proposito, con molta avvedutezza , così ragiona il Montucla . » Io non so se la dimostrazione diretta ,poichè ve ne ha una, sia » tanto convincente, quanto il ripiego preso da Euclide : sembrami pe- » rò, che coloro i quali, nelle loro edizioni di Euclide, hanno così cam- » biata la sua dimostrazione , abbiano irragionevolmente operato . Che » che ne sia, ho vedute parecchie persone, anche istruite in Geometria, » non dar per dimostrazione di questa incommensurabilità , se non la » impossibilità di estrarre la radice quadrata dal numero 2 , per mezzo » dell' approssimazione in decimali . Ma chi è colui , che abbia ancora » provato esser quest' approssimazione interminabile ? Io conosciuto

Euclide, verso la fine, alcune applicazioni, che in taluni codici antichi trovansi esposte in uno scolio separato. In questa giunta finale, o scolio, si comprendono altri esempj di quantità incommensurabili, tutti tra figure piane, e solide; ed a noi occorrerà parlarne più appresso. Intanto per lieve saggio de' problemi, che in questo libro decimo risolvonsi, noteremo, che tra le altre cose vi si cerca *la massima comune misura di due, di tre, o più quantità commensurabili: — alcune linee rette incommensurabili in lunghezza, ed in potenza, con condizioni date: — le quantità così dette* medie, *commensurabili in potenza solamente, le quali contengano un razionale, o un medio*, ec.

Pria di lasciar quest' argomento, proporrò per digressione una mia non inutile congħiettura. L'anello di connessione fra l' Aritmetica, e l' Algebra, sono state, come tutti sanno, le quistioni indeterminate proposte su'numeri: ed i libri VII°, VIII°, e IX° degli Elementi mostrano ad evidenza, che fin da'primi tempi della Geometria, molto si era lavorato intorno ad esse. Ora essendo ciò vero, e se noi troviamo in Euclide adombrato l' uso delle lettere

---

» anch' io un tale architetto ostinarsi a continuarla, sperando sempre » di giugnere ad un esatto risultamento. Quanti stenti si avrebbe risparmiati, se avesse letto, e capito Euclide. (*Histoire des Mathématiques part. I lib. IV. n. 2.*). Per una dimostrazione conveniente della soprindicata verità, è degna di esser letta quella del Lhuilier da me anche recata negli *Elementi di Analisi Algebrica*.

**

alfabetiche, per accennare sì le quantità note, che la incognite, ne' problemi aritmetici su' numeri indeterminati; perchè mai non potremo dir giustamente, che l' introduzione de' simboli nella nostra Aritmetica speciosa, abbia avuto un tipo in questi libri Euclidei, ne' quali si trova evidentemente praticata? E se così dee dirsi, non il Vieta, non verun altro de' nostri italiani può nominarsi a buon dritto autore di quest' importantissima scoperta; o tutto al più potrà loro attribuirsi il merito di avere stabilita la regola, e fissata la maniera di usarne. Non è questo il luogo da insistere sulla probabilità di quanto è quì affermato, e di che mi riserbo a parlar più distesamente nell' introduzione al vol. I. del *Corso di Analisi algebrica*: ma non tralascerò notare, che ancora il Cossali, nel cap. II. della sua elaboratissima opera intitolata *Origine, e trasporto dell' Algebra in Italia*, comunque muova taluna lieve difficoltà sull' addotta opinione, non ha poi potuto fare a meno di conchiudere: » In somma, per quanto si usi restringimento, non si può » negare, che il quinto libro degli Elementi sia, » per la massima sua parte, un modello da Euclide dato di generica, o geometrica, se si vuole, » dottrina in astratte spezie letterali; e che i libri » VII°, VIII°, e IX° ne sieno un simile di astratte letterali spezie di dottrina aritmetica.

Qual sia l' obbietto de' libri XI°, e XII° si è già detto di sopra. La teorica de' solidi si trova in essi

stabilita, in modo da non lasciar cosa veruna a desiderare, per l'ordine ammirabile, che vi si mantiene. Non bisogna pertanto negare, che in alcune definizioni del libro XI°, non si ravvisa quella precisione stessa, che propria è di Euclide, e che tanto ne' primi sei libri si ammira: vi ha parimente taluna dimostrazione, che non rimane paghi abbastanza i geometri rigorosi. Pur non sembra, che imperfezioni siffatte debbano all' accuratissimo Euclide imputarsi: ma che anzi, nell'opera di lui sieno state sparse dalla mano men perita di talun antico espositore degli Elementi, per ambizione d' innovare. Le principali di esse incontransi nelle definizioni 9, 10, ed 11, del libro XI°, cioè in quella de' *solidi simili*, degli *uguali*, e *simili*, e dell'*angolo solido*. La prima, e terza di queste sono alquanto vaghe, e dubbiose; e la seconda in luogo di una definizione, è un teorema da dimostrare [19]. Ove ciò si faccia, la dottrina de' solidi uguali, e simili, anzi che trovarsi *fondata sopra un principio, che vacilla*, come sottilmente ha preteso il Simson[20], sarebbe validamente stabilita, e con tutto il rigore, che si esige in un libro elementare di Geometria. Oltracciò maggior chiarezza si richiedea nell'esposizione di questi due libri, ed alcune dimostrazioni, e soluzioni doveano rendersi più brevi, onde a' principianti

---

[19] Vegg. le note corrispondenti a queste definizioni.

[20] Pref. al suo Euclide.



riuscisse più facile ritenerle. Ed io mi lusingo, che all' una, ed all' altra delle suddette cose siesi provveduto in questa nostra *esposizione degli Elementi*.

In poche istituzioni di Geometria trovasi riportato il libro tredicesimo degli Elementi, perocchè niuna dottrina vi si contiene, che a' giovani principianti importi apprendere. Non cessa però cotal libro di aver pregio non lieve di dottrina geometrica, e non dovea quindi rimanere interamente dimenticato; ecco perchè parvemi opportuno, in alcune edizioni di questo mio Euclide, fino alla decima, di conciliar le due cose, recandolo in una nota al libro undecimo la quale bastava a dare un'idea compiuta di quanto in tal libro viene esposto da Euclide, essendo esso tra quei di *Solida*, come il quarto tra' libri di *Piana*. Ma da ultimo, considerata meglio la cosa, non trovai fuor di proposito di seguire il testo, con le modificazioni opportune; e quindi di riportarlo come terzo libro degli Elementi di *Solida*, da potersi nondimeno comodamente tralasciare, nella comune istituzione degli apprendenti.

Questo libro tredicesimo trovasi per ordinario seguito da due altri, che trattano parimente de' corpi regolari. Ma le teoriche in essi contenute sono affatto superflue per gli Elementi di Geometria, nè sono di Euclide, e male a proposito a' libri geometrici di esso furono aggiunti da Teone, o da altro antico comentatore. Tuttavolta i più accurati ancora tra' moderni espositori di Euclide, a comin-

ciar dal Campano, e terminando al Gregory, gli hanno conservati, come libri XIV°, e XV° degli Elementi, contentandosi quest' ultimo di sparger solamente nella prefazione qualche dubbio, se a quel geometra greco si appartenessero, o pur nò, dicendo: *Elementa haec, prout nunc extant, libris constant quindecim; nisi quod (inquit Gerardus Vossius) de duobus postremis res non sit ita aperta. Plerique eos non Euclidis putant, sed commentarios Hypsiclis Alexandrini, qui ducentis post Euclidem annis floruit. Sane decimusquartus praefationem habet propriam, quam nec primus habet Euclidis: non vano argumento, libros duos ultimos alterius esse, quam Euclidis*. Ma questo sospetto del Gregory, ch' ei fonda solamente sull'autorità del Vossio, nel trovarsi ad essi una prefazione, lo che Euclide non fece nè pure agli Elementi interi, premettendola al libro I, dee cambiarsi in certezza assoluta, se considerisi, che con quella s'indirizzino tali due libri a Protarco, e vi si parli di un tal Basilide Tirio, di cui non si ha alcuna notizia di essere stato un geometra contemporaneo ad Euclide, che col di lui padre avesse in Alessandria conversato, in tempo della peregrinazione ivi fatta; e che essi fossero entrati in considerazioni sopra ciò, che al proposito del dodecaedro, ed iscosaedro iscritti nella stessa sfera, aveva trattato Apollonio, il qual visse circa un secolo, e mezzo dopo Euclide, e che come sembra, aveva di non poco tempo pre-

ceduto l' autor de' due suddetti libri. Aggiungasi, che per chi sia versato abbastanza nelle ricerche geometriche degli antichi, e nella considerazione delle opere di Euclide, ben di altra mano, non di tanto merito, gli si dimostrano; nè le materie in essi contenute sono, con quell' ordine, che si sarebbe convenuto, e da Euclide tanto osservato, connesse con le altre del libro XIII°, e nè pure a compimento delle verità elementari da Euclide stabilite necessarie. Inoltre nella prop. 7 del libro XV°, secondo il testo del Gregory, si dice l' autore discepolo del grande Isidoro, che nessun mai ebbe a maestro di Euclide, e tra' geometri, che prima di lui, e con esso avessero vivuto. Di tal che questi due libri debbonsi assolutamente riguardare come ad Euclide non appartenenti; e probabilmente, come i più credono, una superflua aggiunzione d'Ipsicle Alessandrino, o di altro geometra a quel torno di tempo. E noi però ci siamo astenuti non solo dal riportarli; ma ancor dal dar qui di essi più distinta notizia.

Intanto il vedere i libri della *Solida* di questo geometra separati da quei della *Piana*, per mezzo del VII°, VIII°, IX°, e X° de'quali si è parlato, debbe indurre necessariamente ognuno a pensare, che sì fatti libri sieno preliminari necessarj alla scienza de' solidi. E tal fu in vero l' opinione di parecchi sommi geometri, ed ancor del Clavio, e del Gregory; il primo de'quali, nel comento alla definizione

prima del lib. VII si esprime così: *Hactenus egit Euclides de priori Geometriae parte, ea scilicet, quae circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, et incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime quae regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis, plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriae theoria in opus conferatur atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi.*

. . . .

. . . .

Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris est implicata, et coniuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorum explantionem, ut doctrinae suus ordo, ratioque constaret, lineis illis anteponi. Sul principio poi del libro X° lo stesso Clavio dice: *Absolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quae ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res geometricas intelligendas; nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, et incommensurabilium quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitio-*

ne harum linearum, complures magnitudines cum solidae, tum planae, neque perfecte intelligi possunt, neque, cum res tulerit, in opus atque usum conferri, propterea quod plerumque latera earum incommensurabilia sunt: id quod et de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum et haec incommensurabilia saepe numero existant; ut ad finem huius libri demonstrabimus. Ed il Gregory, nella prefazione al suo bellissimo Euclide greco-latino, ragiona sopra di ciò nel seguente modo: *Proprie tamen Geometria haec dividitur in* επιπεδον θεωριαν *(superficierum contemplationem) et* στερεομετριαν *(solidorum). Sed* στερεομετρια *intelligi nequit sine notitia linearum* συμμέτρων *et* ασυμμετρων; *nec hanc scire possumus, nisi notitiam habeamus numerorum.*

Questi due sommi geometri, e con essi molti altri, voglion dunque darci chiaramente ad intendere, che la dottrina de' numeri, e quella delle grandezze incommensurabili debba essenzialmente premettersi all' altra de' solidi. Se così fosse, dovrebbe ognuno aspettarsi di veder d' ordinario citate le proposizione de'libri VII°, VIII°, IX°, e X°, nell' XI°, e XII°: non pertanto, se eccettuisi la prima del libro X°, che ad Euclide valse di lemma ad alcune proposizioni del XII°, e che parimente come lemma sta dove si trova, non facendo affatto parte delle ricerche del libro X°, non v'ha niuna dimostrazione, o soluzione ne' libri della *Solida*, che sup-

ponga in verun modo l'esistenza de'quattro libri interposti. E per vero dire in niun corso moderno di Geometria elementare Euclidea, non escluso quello del Simson, si trovano più questi libri: ed il Borelli, nel suo *Euclides restitutus*, stimò a proposito di esporre le dottrine in essi comprese, dopo aver trattate compiutamente quelle, che riguardavano la Geometria. Che se nel solo libro XII° incontrasi una qualche applicazione delle teoriche del libro X°, il che diede fondamento per avventura alle opinioni del Clavio, del Gregory, e di altri geometri, che in ciò pensarono com' essi, uopo è considerare, che le cose, che di tale ajuto abbisognano, non formano già l' essenziale di questo libro. Oltre a ciò così fatta applicazione può benissimo accordarsi colle conghietture, che poco stante esporrò su questi quattro libri elementari. Di più, se le teoriche d' incommensurabilità debban premettersi a quelle de' solidi; perchè mai non dovranno ugualmente premettersi alle altre delle figure piane, che possono del pari esser commensurabili, ed incommensurabili? Ma ecco ancora un' altra osservazione: nell'ultima proposizione del libro X°, come si è già detto, Euclide dopo avere in due diversi modi dimostrato, che la diagonale, ed il lato del quadrato sono incommensurabili tra loro, continua come segue: *Itaque inventis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, ut A, B invenientur et aliae quamplurimae magnitudines ex duabus di-*

mensionibus, nimirum superficies incommensurabiles inter se se. Si enim inter ipsas A, B mediam proportionalem sumamus rectam lineam C : erit ut A ad B, ita figura quae fit ex A ad eam quae ex C similem, et similiter descriptam, sive quadrata, sive alia rectilinea similia, sive circuli, qui circa diametros A, C describantur : quandoquidem circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata. Inventa igitur sunt spatia plana inter se incommensurabilia. Ostensis autem his, ostendemus etiam ex solidorum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia, et incommensurabilia inter se se. Nam si in quadratis ex A, B, vel in rectilineis quae ipsis aequalia sint, solida aeque alta constituamus, sive parallelepipeda, sive pyramides, sive prismata, erunt ea inter se uti bases; et si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensurabilia, si vero incommensurabiles, et ipsa incommensurabilia erunt —. Sed et duobus circulis existentibus A, B, si in ipsis conos aeque altos, sive cylindros constituamus, erunt inter se uti ipsorum bases, hoc est ut A, B circuli; et si quidem circuli commensurabiles sint, eommensurabiles erunt et coni inter se se, et cylindri; si vero incommensurabiles, et coni, et cylindri incommensurabiles erunt. Ex quibus perspicuum est, non solum in lineis, et superficiebus esse commensurabilitatem, et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris.

Or chi da tutto ciò chiaramente non vede, che

il lib.X°, non possa stare innanzi all' XI°, e XII° ? Imperocchè nel citato luogo di esso pressochè l' intera teorica si accenna del rapporto delle figure solide. Il Gregory avendo sostenuto, che tali libri fossero a lor luogo, dovè poi necessariamente ricorrere all'espediente di affermare, che le cose ivi riportate nello scolio, o non sono di Euclide, o almeno non debbono stare in questo luogo; poichè dipendono dalle seguenti[21]. Ma senza derogare al rispetto, che deesi ad un geometra del suo merito, potrem dire essersi egli fortemente ingannato; poichè primieramente non v' ha ragione da dubitare, che queste cose non sieno di Euclide, quando si ammetta come sua la proposizione cui sono strettamente connesse: ed è poi ben conseguente, e ragionevole, ch' Euclide, dopo aver sì a dilungo ragionato delle quantità commensurabili, ed icommensurabili, volesse indi provare con più esempj geometrici l' esistenza di queste ultime grandezze, non solamente tra le figure piane, ma tra le solide ancora. Tanto meno può dirsi, che quello scolio non sia nel suo luogo: poichè quale altro gliene potrebbe competere negli Elementi? Il Gergory dunque si è fatto indurre in fallo dall' impegno di sostener quanto avea nella prefazione asserito. L'uso stesso, che poteano aver questi libri in Geometria, ci dimostra

---

[21] Si riscontri la noterella in piedi della pag. 326. del suo Euclide.

in oltre non aver mai potuto Euclide destinar loro quel luogo, nel quale si trovano. Imperocchè comprende ognuno, che gli antichi non doveano studiar con tanto ardore le cose geometriche, per puro lusso letterario; ma sì bene per l' utilità, che recano esse nella vita civile, e per usarle in pratica: e questi libri doveano essere senza dubbio destinati, a porre in opera le ricerche geometriche della *Piana*, e della *Solida*; la qual cosa vien chiaramente dimostrata dalle dottrine, che vi si espongono. E se appare ne' medesimi esser data tanta importanza alla teorica degl' incommensurabili, ciò proviene in parte dal perchè mancavano gli antichi di metodi aritmetici di approssimazione; e però pria d'imprendere un' operazione pratica, doveano assicurarsi della qualità delle grandezze sulle quali operavano: ed altronde ciò mostra il sommo rigore, e l'esattezza, ch' essi adoperavano in tutte le loro cose. Che tal fosse l' uso di cotesti libri, lo accenna anche il Clavio ne' due luoghi allegati. Or posto ciò; perchè mai un trattato, che serviva a ridurre in pratica le teoriche della *Piana*, e della *Solida*, dovea seguire gli Elementi della *Piana*, e precedere quei della *Solida*? Agli uni, ed agli altri esso avrebbe dovuto certamente o seguitare, o precedere. V'ha più, che siccome nel settimo libro si ragiona de' numeri *quadrati*, e *cubi*, ed abbiamo già de' primi un' idea di corrispondenza geometrica; la stessa idea conveniva formarsi de' secondi: ed in qual maniera poteva ciò

effettuarsi, facendo prcedere questi libri agli Elementi della *Solida*? Lo stesso dicasi pe' numeri *piani*, e *solidi*.

Da quanto si è detto sembra potersi conchiudere, che i libri VII°, VIII°, IX°, e X°, anzi che precedere l'XI°, XII°, e XIII°, dovrebbero venir dietro a questi. Ma io fo conghiettura, e non senza qualche fondamento, che questi quattro libri non furono per avventura da Euclide in un'opera sola compresi cogli Elementi geometrici, e che formarono un trattato diverso, il quale a' giovani s' insegnava unitamente agli Elementi di Geometria; non altramente, che veggiamo a dì nostri accoppiarsi allo studio di questa scienza quello dell' Aritmetica, e dell' Algebra. Ed ecco i motivi di tal mia opinione. Principal carattere di una buona istituzione elementare di Goometria, egli è certamente, il non ammettere interruzione alcuna nella catena delle verità necessarie, che vi si contengono: ma senza però esservene veruna superflua, o ripetuta: e non v' ha certamente persona, che di tai lavori geometrici si conosca, che di ciò non convenga. Quindi se ad Euclide toccò fra gli antichi matematici, pel merito de' suoi Elementi, la riputazione di *geometra accurato*[22], debbe aversi per fermo, che nell' ordinarli egli avesse un tal precetto rigorosa-

[22] Così lo dice Pappo Alessandrino nella prefazione al lib. VII. delle *Collezioni Matematiche*, e poco dopo soggiunge *neque usquam deceptus est*.

mente osservato . E per vero dire,non gli si darebbe alcun dritto a questo titolo, da chi volesse presupporre, che il libro VII°, ed i tre seguenti facessero parte de' suoi Elementi geometrici ; imperocchè si trovano in quel libro dimostrate pe' *numeri* le stesse verità già messe in chiaro da Euclide per le grandezze in generale , e quindi anche pe' numeri , nel lib. V°. In fatti qual necessità vi era di dimostrare, che : » *Se un numero sta ad un altro , come una parte del primo ad una parte del secondo, anche il rimanente del primo stia al rimanente del secondo , come quel numero a questo* , se ciò contenuto era nella prop. 19 del libro V° ? E che : *Se quattro numeri sono proporzionali , permutando sono ancora proporzionali ?* la qual verità vien dimostrata generalmente nella prop. 16 del libro citato. In una parola le prop. 11 , 12 , 13 , 14, e 22 del lib. VII° non sono, che ripetizioni delle altre 19, 12 , 16, 22, e 23 del lib. V°, ridotte al particolare . Potrebbe anche provarsi facilmente , che negli altri libri , e principalmente nel X° , vi sieno altre verità, che affatto non avrebber dovuto in questo libro dimostrarsi, ov' esso formato avesse una continuazione di teoriche col libro VI°. Ma concedendo ancora , che trattandosi poi specialmente una teorica generalmente esposta , convenga di nuovo dimostrarne i casi particolari ; potrebbe richiedersi , perchè mai Euclide , che tanto sistema , ed uniformità pose nelle sue opere , avrebbe fatta que-

sta eccezione per la teorica de' numeri, la quale non entrava, che accidentalmente nel piano de' suoi Elementi, ed avrebbe poi tralasciato di ciò fare per le grandezze continue nel lib. VI° ? Se dunque riconoscer vogliamo in Euclide il carattere di esattezza, che da tutte le sue cose risulta, e se non vogliamo distruggere male a proposito l'opinione di tutt'i geometri antichi a suo riguardo, bisogna convenire, che questi quattro libri formavano un' opera interamente separata da' suoi Elementi di Geometria, la quale forse insegnavasi nelle scuole greche contemporaneamente a quelli. Ciò posto, cotesti libri, comunque si contengano in essi, come dicemmo, parecchie dimostrazioni degne di esser lette, non debbono comprendersi nell'ordinaria istituzione, non solamente per esser superflui per noi, che possediamo l' Aritmetica volgare, e la speciosa: ma ancora per le ragioni dianzi arrecate. In conseguenza di ciò i libri XI°, XII°, e XIII°, non sono a rigore, che il VII°, VIII°, e IX° degli Elementi geometrici di Euclide, che forse da Teone Alessandrino, o pur da tal altro antico espositore furon trasportati dove ora si trovano, staccandoli da' primi sei libri con altri di diverse trattazioni. Noi pertanto continueremo a nominarli XI°, XII°, e XIII°, trovandosi quest' uso inveterato, e così incontrandosi citati da tutti.

PRINCIPALI VERSIONI, E COMENTI

SOPRA GLI ELEMENTI DI EUCLIDE.



Non è forza di un solo il minutamente trattare delle diverse traduzioni, e di tanti comenti fatti sugli Elementi di Euclide; ed altronde ciò sarebbe inutile per la gioventù, e lontano dal nostro scopo. Basterà dire, che quest'opera sia stata in tutte le lingue tradotta, e comentata [23]. Sarebbe dunque mestieri non meno, che una competente cognizione di moltissime lingue, ed una lettura interminabile per giugnere a quest' intento. Mi limiterò quindi a dar solamente un saggio delle versioni più conosciute, e de'comenti principali; la qual cosa, oltre alle utili cognizioni, che appresterà pe' giovani, varrà eziandio a liberar me dalla taccia di coloro, che non sapendo per se medesimi discernere, qual possa essere il merito di novità in un lavoro scientifico già tante volte, e da sommi uomini riprodotto, grideranno pur contra colui, che ora è tornato a produrlo [24]. Chi poi vorrà notizie bibliografiche sul



[23] Vi sono di Euclide moltissime versioni in latino, italiano, francese, spagnuolo, inglese; e ve ne sono anche in tedesco, svedese, danese, russo. E per riguardo alle lingue orientali un tal libro è stato più volte tradotto in arabico, e comentato, e ne sono state anche fatte traduzioni in persiano, in turco, ed in ebraico.

[24] Debbo esser ben contento delle cure da me impiegate in riprodurre tante volte più emendati gli Elementi geometrici di Euclide, e di aver sostenuto presso noi, per tanti anni l' insegnamento della Geome-

proposito, troveranne in copia raccolte in tutte le biblioteche dotte; e potrà principalmente consultare un' operetta del sig. Bose di Wittembergh citata con lode dal Montucla, che ha per titolo: *Schediasma litterarium etc. de variis Euclidis editionibus*. *Lipsiae* 1734 in 4°, e l'eruditissima Storia delle Matematiche dell' Heilbronner, all' articolo *Euclides*.

Comentatori greci.

Teone, uno degli ultimi geometri della scuola di Alessandria, che visse nel quarto secolo, si ha come il primo comentatore di Euclide. I suoi comenti, o scolj trovansi ancora nell'Euclide del Commandini, del quale appresso parleremo. Altro codice greco degli Elementi non è fino a noi pervenuto, oltre quello co' comenti di Teone: ed è però, che sommi geometri moderni avendo in esso non pochi difetti ravvisato, i quali chiaro è non potersi ad Euclide attribuire, credono doversene accusare le mutazioni, che Teone avesse tentate sul testo. Ma sia così, o sia, che alcuni di quei difetti appartengano alla negligenza, o all' ignoranza degli antichi menanti, certo è, che Teone avrà sempre il torto, di averci trasmesso un testo degli Ele-

tria su' medesimi; mentre non solo si è la buona istituzione conservata tra noi, ma ancora in Italia; e mi avveggo pure di aver prodotto altreve qualche buon frutto, osservando di essersi ritornati al rispetto dovuto, ed allo studio delle opere degli antichi.

menti pieno di molte scorrezioni degne di essere avvertite.

Susseguentemente, gli Elementi di Euclide, o almeno il primo libro di essi, ebbero un altro annotatore nella persona di Proclo [25], geometra del quinto secolo [26]. Quest' opera di Proclo, comunque piena di moltissime distinzioni scolastiche proprie di que' tempi, è pertanto commendevolissima per copiose notizie di storia geometrica, le quali altramente non sarebbero a noi pervenute, e pe' diversi tratti ond' ella è sparsa, riguardanti la metafisica della Geometria. L' Euclide greco stampato per la prima volta nel 1533 in Basilea, presso il celebre, e dotto stampatore Ervagio, per cura di Simone Grineo, contiene oltre gli scolj di Teone, anche il testo greco de' comentarj di Proclo, colla versione latina in fine; la quale a questi ultimi fu pur fatta da Francesco Barocci patrizio Veneto, ed impressa in Padova nel 1560 in *fol.*, col titolo: *Procli Diadochi Lycii* etc. *Commentariorum ad universam Mathematicam disciplinam libri IV.*

---

[25] Di questo geometra scrisse la vita il suo discepolo Marino, che gli successe nella scuola, del quale non è giunto a noi altro matematico lavoro, tranne una prefazione a' *Dati* di Euclide, la quale trovasi ordinariamente impressa nel principio di questo libro.

[26] Pietro Ramo, nelle sue *Scholae Mathematicae*, alla *pag.57*, è caduto in un equivoco notabile, nel creder Proclo vivente nel primo secolo dopo Cristo, e quindi anteriore a Teone. Egli s' esprime in fatti così: *Proclus aetate maior Theonem minorem, neque videre, neque nosse potuit. Proclus floruit proximo post Christum saeculo; Theon fere quarto.* Dal che risulta esser falso l' argomento, ch' egli fonda sopra di ciò (*Veg. il luogo cit.*).

VERSIONE E COMENTI DI EUCLIDE IN ARABICO.

Moltissime versioni in arabico furon fatte di Euclide con comenti [27]; la più celebre di tutte, e della quale convien però far quì menzione, fu quella del celebre geometra, ed astronomo persiano Chogiah Nassireddin al Thussi, eseguita nel secolo tredicesimo [28]. Una tale opera, che, per opinione di quanti alla conoscenza della original sua lingua riuniscono quella delle Matematiche, contiene un' esatta esposizione del testo di Euclide, e dotti comenti sovr' esso, fu stampata per la prima volta in arabico in Costantinopoli, nell' anno 996 dell' Egira: e fia per sempre un alto monumento della protezione, che, contro al creder comune, il governo ottomano accordava alle Matematiche, un privilegio turchesco del sultano Amurat, impresso in quella edizione, col quale si permette la vendita di questo libro in tutto l' impero ottomano, *senza un danajo di dazio, o di gabella*. Ed essa fu ristampata nella lingua stessa nel 1594, nella superba tipografia Medicea in Roma, per mez-

---

[27] L' Herbelot, nella sua Biblioteca Orientale, all' articolo *Aklides*, annovera cinque traduttori di Euclide, e dieci comentatori, tra i quali distingue il Nassireddin, oltre un compendiatore. E può anche vedersi a questo proposito il Montucla nel *n. 17. del lib. I. parte II.* della sua Storia delle Matematiche.

[28] Un luogo del *Ban-Hebraeus. Cron. Arab. parte X.* riportato dall'Assemanno, nel Catalogo de' MSS. della Biblioteca Medicea, dice: *Hoc etiam tempore (nimirum anno Hegirae 675, Christi 1276) diem obiit, annos septuaginta octo natus, Chogiah Nassireddinus Tusensis.*

go di un codice della biblioteca Medicea, riportato dall' Assemanno nel catalogo di essa al n.272. Tra le cose contenute in questo libro, merita di esser notato un ingegnoso tentativo per dimostrare il postulato quinto di Euclide. Quivi il geometra persiano, maestrevolmente invertendo l'ordine di alcune proposizioni del libro I. degli Elementi, fa precedere la proposizione 32 di tal libro alla teorica delle parallele; ingegnandosi a dimostrar quella, senza servirsi di questa, come ha fatto Euclide. Siffatta dimostrazione vien parimente riportata dal Castiglioni padre, nella prima memoria su tal postulato, da esso inserita nel volume dell' Accademia di Berlino, per l'anno 1787. Ma potrà bastare sul proposito legger quello, che da noi sarà recato nelle note in fine di questo nostro Euclide.

Oltre all' opera di cui parliamo, deesi alle cure di sì valente geometra una raccolta delle versioni in arabico di numerose opere geometriche, uscite da diversi autori della scuola greca. Questa raccolta intitolata: *Tahrir Hendassiat* (*accurata collectio geometrica*) [29] contiene — *La spiegazione degli Elementi di Euclide*; — *l'Almagesto di Tolomeo*; — *i Dati di Euclide*; — *la Sferica di Teodosio*; — *la Sferica di Menelao*; — *la Sfera mobile di Autolico*; — *l' Ottica di Euclide*; — *il libro della notte, e del giorno di Teodosio*; — *le ascensioni*,

[29] Si riscontri la Biblioteca dell' Herbelot all' art. *Tahrir*.

e discensioni, cioè *dello spuntare, e del tramontare degli astri*, opera attribuita ad *Autolico* [30]; — *gli Oroscopi di Asclepio, o Esculapio*; — *il Trattato de' dischi solare, e lunare di Aristarco*; — *della conoscenza, ed estensione delle figure*, opera anonima; — *i Lemmi* attribuiti ad *Archimede*; — ed i suoi *due libri sulla Sfera, e sul Cilindro*; — *il trattato di Teodosio della posizione, o della quiete de' corpi*; — *i Conici di Apollonio*. A tal maravigliosa collezione di opere de' greci maestri, aggiugnesi un *trattato delle Sezioni Coniche* di Thèbit-Ben-Corrah, e sei libri di note del Nassireddin. Si riscontrino per le cose già dette l' opera citata dell' Herbelot, ed il catalogo poc' anzi detto dell' Assemanno.

[30] In due codici arabici della biblioteca Medicea, riportati dall' Assemanno a' num. 271, e 286 del catalogo di questa, vi si rapportano i nomi di quei dotti arabi, che tradussero le opere de' greci, le quali poi riunite dal Nassireddin hanno formata la collezione di cui si parla; ed in ciascun di quelli attribuiscesi il libro *delle ascensioni, e discensioni* ad *Autolico*: perciò non sapremmo dire per qual ragione il Toderini, dopo aver detto essere anonima una tale opera, soggiunga, *e pare di Teodosio*.

PRINCIPALI VERSIONI E COMENTI DE' MODERNI
DAL SECOLO XII. AL XVI.

Gli Elementi di Euclide si videro la prima volta in Italia nel secolo XIII°, tradotti dall' arabo, con non dispregevoli comenti, da Campano di Novara. Questa versione fu nel 1482 stampata in Venezia da Erhard Ratdolt, uno de' primi stampatori di quel tempo, in *fol.*, col titolo: *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi in artem Geometriae incipit quam foelicissime*; colla leggenda in fine: *Opus elementorum Euclidis megarensis in Geometriam artem. In id quoque Campani perspicacissimi commentationes finiunt. Erhardus Ratdolt Augustensis impressor solertissimus, Venetiis impressit. Anno salutis* M.CCCC.LXXXIII. *Octavis. Kal. Jun. Lector vale*. Si veggono in essa, per cura di quel valente stampatore, impresse, non senza eleganza, le figure al margine del libro, maniera prima di lui non conosciuta. Un tal libro, fu poscia ristampato in Ulm nel 1486; e quindi nel 1489, o 1491 in Vicenza, presso i socj stampatori Lionardo di Basilea, e Guglielmo di Pavia. Da questa versione, ed esposizione del Campano in poi, gli Elementi di Euclide diversi altri espositori incontrarono; ma niuno prese a farne novella versione, e ciò fino al secolo XVI°.

Comunque importante fosse conoscer l' epoca di Campano, poichè vivente lui, la Geometria prese

ad esser conosciuta comunemente in Italia , e poscia oltremonti , essa è divenuta nondimeno un affare di opinione tra i dotti . Il Tritemio [31] seguito da molti altri , e tra questi dal Bruckero [32] , e dall' insigne geometra Viviani [33] , lo ha fatto vivere nel 1030 ; il che se fosse vero , l' epoca della conoscenza della Geometria in Italia rimonterebbe al secolo XI° , e Campano sarebbe stato assolutamente il primo traduttore degli Elementi di Euclide dall' arabo. Molti altri tra' quali il Vossio [34], ed il Fabricio [35], il rimettono alla fine del secolo XII°, e ciò potrà forse esser vero, atteso quello, che poco avanti diremo. Certa cosa è , che il Campano dedicò il suo trattato *de Sphaera* ad Urbano IV , protettor delle scienze a suoi tempi [36]; il che mostra non aver egli potuto scriver quest'opera, che tra 'l 1261, quando Urbano IV giunse al Pontificato, e 'l 1264, nel quale anno morì. Rilevasi da ciò com' egli fosse già filosofo, e matematico rinomato alla metà del secolo XIII° ; e che però era stato preceduto per più di un secolo , nella versione di Euclide dall'arabo, da Adelardo Goto monaco del monistero Batoniense

---

[31] *De Script. eccl.* c. 334.

[32] *Hist. crit. Phil.* part. II. lib. II. cap. 2. §. 44.

[33] *Praef.* in *Aristaeum*.

[34] *De nat. Art. l. 3. cap. 36.* §. *23.*

[35] *Bibliot. gr.* tom. *2*. pag. 373.

[36] Una tal dedica , ch' era restata per lungo tempo inedita , nella Biblioteca Ambrosiana di Milano , viene riportata dal Tiraboschi , nel lib. II. della sua egregia *Storia della Letteratura Italiana*.

nel secolo XII°. Ma chi asserirà mai, che la versione di quest' inglese fosse nota nel continente, ed a Campano, quando egli produsse la sua ? Potrà dunque a Campano restare il merito di aver dato mano il primo a questo assunto nel continente . Il Tiraboschi, fatta ogni sua prova , per mostrar , che Campano visse a' tempi di Urbano IV , deduce da ciò, ch' egli si servisse della versione di Adelardo , che solamente arricchì di suoi comenti : ed ei vorrebbe che così fosse, onde liberarlo dalla taccia, che giustamente gli si appone da' dotti matematici, di aver data *sopra una cattiva versione arabica una peggiore versione latina di Euclide*. Ma chi non vede, che tanto valesse pel Campano il non aver avvertite le diffalte della versione di Adelardo , nella ipotesi del Tiraboschi ; quanto il non averle riconosciute nella versione arabica sulla quale lavorò quell' inglese. Adunque per questa parte non potrà mai scusarsi il Campano . Il Tiraboschi inoltre allega , in sostegno della sua opinione , le epigrafi di diversi codici annoverati nel catalogo della biblioteca del re di Francia , ed in quello de'MSS. dell' Inghilterra, ne'quali il Campano è detto semplicemente comentatore ; fondandosi particolarmente su quello n.7213 della biblioteca regia francese, che ha per epigrafe : *Euclidis Elementorum lib. XV. ex arabico in latinum ab Adelhardo Gotho Batoniensi conversi , cum commentario Campani Novariensis* , e sull' altro n.3359 de'MSS. dell' Inghilterra, e dell' Irlanda, il

cui titolo è : *Euclidis Elementorum lib. xv* , *ex versione Adelhardi de arabico* , *cum commentario Magistri Campani Novariensis* , poichè quivi è detto chiaramente aver il Campano comentata la versione di Adelardo . Ma cade l' autorità di siffatti codici , ove si avverta in quante guise furon mai sempre guaste, e corrotte le intitolazioni de' libri da coloro, che gli trascrissero : oltre ciò altri codici pur s'incontrano in cui Campano è non solamente nominato qual comentatore di Euclide, ma come altresì traduttore di esso dall' arabico ; nè trovasi altronde mai fatta menzione da Campano di essersi servito della versione di Adelardo, che forse nè pur conobbe ; nè tampoco s' incontra ciò detto dagli altri espositori di Euclide , che a poca distanza di tempo il seguitarono , i quali al contrario ebbero sempre il Campano come autore di tal traduzione. Per verificare se la versione degli Elementi attribuita al Campano fosse, o no la medesima con quella di Adelardo, sarebbe stato ben fatto confrontare l'opera del primo , con qualche genuino codice della versione del secondo. Ma che che sia di ciò, toccherà sempre al Campano il vanto di aver fatto il primo conoscer nel continente gli Elementi di Euclide, e di averli arricchiti di dotti comentarj, che dagli amatori della buona Geometria si leggono , e si studiano tuttora , che sono stati in gran parte dal Clavio abbracciati , e dal celebre geometra Viviani con grande stima citati.

Il Campano aggiunse, alla fine del lib. V° di Euclide, la teorica delle ragioni disuguali, ricavandola dalle *Collezioni Matematiche* di Pappo; e questo esempio seguiron poscia altri espositori di Euclide, come il Clavio, il Commandini, il Barrow, *ec.*

Nel principio del secolo XVI°, molte versioni furon fatte degli Elementi. Si annovera tra le più degne quella di Bartolomeo Zamberto, eseguita sul testo greco, e stampata la prima volta in Venezia sua pàtria nel 1500, con molti errori di stampa; e posteriormente in Parigi da Errico Stefano, per cura di Jacopo Faber, e Michele Pontano, co' comenti di Teone, e del Campano, oltre quelli del Zamberto; ed indi in Basilea diverse volte. Non pertanto notasi una tal versione come inesatta. Il Tartaglia in oltre produsse la sua versione italiana degli Elementi, in Venezia nel 1543, ristampata poi nel luogo stesso nel 1557, e 1585. Una tal versione, ch' è la prima di quest' opera nel nostro idioma (non potendo per tale aversi quella, che Luca Paccioli, detto più comunemente *de Burgo*, aveva pubblicata nel 1489, che fu poi riprodotta nel 1523, nella sua *Summa de Aritmetica, Geometria, ec.*), non sarebbe dispregevole, se non presentasse una certa spiacevolezza, per la locuzione scorretta, e quasi popolare adoperata dal traduttore. Il Foix-Candalla venne appresso a pubblicare nel 1566 il suo Euclide, nel quale estese ancor più, che non aveva fatto Ipsicle Alessandrino le ricerche poco utili, e meno ele-

mentari su i corpi regolari; e nè men rimanendone soddisfatto le accrebbe nella ristampa, che ne fece nel 1578. Ma io non mi arresto a parlar oltre di queste, e di altre versioni poco importanti per noi; e passerò ad esporre quelle altre, che dopo la metà di tal secolo faustissimo per la Geometria ne diedero, con grande utilità, due valentissimi geometri il Commandino, ed il Clavio.

Principali versioni, ed esposizioni degli Elementi di Euclide, eseguite da' geometri del continente dopo la metà del secolo xvi°, e nel xvii°.

Non v' ha lode, che basti a compensare i grandi servigi resi alle Matematiche da Federico Commandini da Urbino, geometra del secolo xvi°, ingegno operosissimo, assai valente in lingua greca, e parimente, pe' suoi tempi, conoscitor profondo di queste scienze, e diligente scrutatore delle opere degli antichi geometri. Alle dotte fatiche di lui dobbiam primamente la migliore, e più esatta versione, dal greco in latino, degli *Elementi* di Euclide, e de'due libri d' Ipsicle Alessandrino aggiunti a' medesimi, con brevi comenti, e pieni di soda dottrina, stampata in Pesaro nel 1572, ed in seguito varie altre volte ristampata: ed oltre ciò le versioni ancora, ed i comenti de' *primi quattro libri de' Conici* di Apollonio Pergeo, e delle opere di Archimede [37], come

[37] I libri di Archimede tradotti dal Commandini, ed illustrati con suoi comenti sono — *Circuli dimensio* — *de lineis spiralibus* — *Quadratura*

ancora delle *Collezioni Matematiche* di Pappo Alessandrino, lavoro assai difficile, che avendolo lasciato senza perfezionarlo, fu dopo la di lui morte, dal suo genero, Valerio Spacciolo, impresso scorrettamente in Pesaro nel 1588, e susseguentemente in Bologna meglio corretto nel 1660. Egli tradusse ancora le *rimanenti opere* di Euclide, i trattati del *Planisfero*, e dell'*Analemma* di Tolomeo, il libro di Erone Alessandrino, che ha per titolo *Spiritalium*, quello di Teodosio *de habitationibus*, e gli altri due *de' giorni*, *e delle notti* dello stesso autore [38]; i due libri di Autolico *sullo*

---

paraboles — *de Conoidibus, et sphaeroidibus lib. II.* — *de arenae numero*, pubblicati accuratamente da Paolo Manuzio figliuolo di Aldo, in Venezia nel 1568; e tre anni prima aveva già dati fuori i due libri *de his quae vehuntur in aqua*, ridotti al pristino nitore da una versione latina scorrettissima, non conoscendosi ancora di tale opera alcun codice nella original lingua, ed illustrandoli con comenti. Aggiunse a questi un suo libro *de centro gravitatis solidorum*, sul quale argomento avea poco prima composto un trattato il nostro messinese Maurolico, che a mostrar di quanto valore ei fosse; e qual rispetto ne avessero i sommi uomini di quel tempo, starà bene recar qui ciò, che sul proposito ne dice il Commandini: *Cum autem ad hoc scribendum aggressus essem, allatus est ad me liber* Francisci Maurolici *messanensis, in quo vir ille doctissimus, et in iis disciplinis exercitatissimus affirmabat se de centro gravitatis corporum solidorum conscripsisse. Cum hoc intellexissem, sustinui me paulisper, tacitusque expectavi, dum opus clarissimi viri, quem semper honoris causa nomino, in lucem proferretur: mihi enim exploratissimum erat Franciscum Maurolicum multo doctius, et exquisitius hoc disciplinarum genus scriptis suis traditurum* .... Ma altrove dovremo ancor ritornare su questo nostro distinto matematico, che per non averlo ben conosciuto nelle sue opere un dotto astronomo francese, ne ha parlato con minore stima di quella, che gli fosse dovuta.

[38] Di queste due opere di Teodosio ne diede anche la versione, su di

spuntare, *e tramontare delle stelle*, e l' altro *della sfera*, *che si muove*; in oltre il libro di Aristarcò intitolato *delle grandezze*, *e distanze del sole*, *e della luna*, con la spiegazione di Pappo. E tutte tali opere illustrò con suoi comenti. Finalmente ancora il libro *de superficierum divisionibus*, attribuito a Macometo Bagdadino, da Giovanni Dee inglese con gran fatica interpetrato, e dal Commandini cui quello il legò perfezionato, ed esteso. Lo stesso Commandini diede dell' Euclide da lui tra dotto in latino, una versione in italiano, che fu stampata in Urbino sua patria nel 1575, e poscia in Pesaro nel 1619, con giunte, e correzioni. Ma questa non ha il merito dell' altra latina, che ne aveva già data.

Due anni dopo dell' Euclide del Commandini, fu stampato in Roma in due volumi in 8° l' Euclide di Cristoforo Clavio gesuita, nelle matematiche assai versato, esponendovi i tredici libri degli Elementi, con gli altri due d'Ipsicle, e con un decimosesto libro, ove imitando il Foix-Candalla estende egli la dottrina de'solidi regolari. Con molto metodo sono scritti i comentarj, che vi aggiunse, e di cognizioni utilissime ripieni; le quali cose resero pregevolissima quest' opera, che però venne più volte ristampata. Il Clavio si avvisò di fare anche a proposito sul testo di Euclide alcune mutazioni, molte cose

---

un MSS. della biblioteca Vaticana, un geometra nostro, non ultimo de' suoi tempi, *Giuseppe Auria*.

accortamente correggendo, in cui gli parve viziato; come potrà pure rilevarsi dalle nostre note.

Di molte altre pubblicazioni degli Elementi di Euclide fu fecondo il secolo XVII°, tutte però di poco pregio, per non aver migliorato il testo del greco autore, nè eseguita nuova versione di esso; e per non esservisi nè meno puntualmente attenuti. Tra esse, per dir qualche cosa delle principali, e più conosciute, noteremo quella del Puteano stampata in Parigi nel 1612 *in fol.*; l' altra co' comenti di Claudio Riccardo pubblicata in Antuerpia nel 1645 *in fol.*; quella del Guarini del 1671 *in fol.*, in Torino; e finalmente l' italiana di Vitale Giordano da Bitonto stampata in Roma nel 1680.

Ebbero pur luogo nel corso di questo secolo, poichè lo studio della Geometria rendevasi più comune, diverse parafrasi, di cui diremo qualche cosa solamente delle due, che hanno avuto uso più frequente, e lungo nelle scuole, e però sono state diverse volte, ed in diversi luoghi ristampate, cioè l' Euclide del Tacquet, e quello del Dechales. Il primo di questi pubblicò in Antuerpia sua patria, nel 1654, i soli primi sei libri, e l' XI°, e XII°, con notabili cambiamenti, e modificazioni del testo, che incontrarono il gusto de' molti istitutori, che l' uso più comune della scienza cominciava a produrre, per una certa facilità indotta dall'autore in talune dimostrazioni snervandole, adottando un metodo poco rigoroso, e nè men proprio alle geometriche ricer-

che. Vi furono anche suppresse alcune proposizioni giudicandole, con poco accorgimento superflue, e talune definizioni cambiate, con grave danno del rigore, e dell' esattezza geometrica. L' altro poi fece pubblicare la prima volta il suo Euclide, cioè i soli libri geometrici, in Parigi nel 1672 in 12, da che può rilevarsi, che non destinavali se non ad uso delle scuole, nelle quali ebbe pur buona fortuna, e per non breve tempo: ed egli sebbene si fosse meno del Tacquet dipartito dalla maniera Euclidea di dimostrare, pur tuttavia non serbolla interamente, come convenivasi, nè alcuna correzione indusse nel testo. Aggiunse in oltre ad ogni proposizione l' uso di essa nelle diverse parti delle Matematiche, quasi che la Geometria non mirasse ad altro scopo, che a questo, confondendo le menti de' giovani con nozioni anticipate: ed avvezzandole così al poco rigore, distruggeva uno de' principali vantaggi della buona, e perfetta istituzione geometrica. E ciò valga per altri simili elementi di Geometria, che posteriormente ebber luogo.

Chiuderò il presente articolo con accennare, tra le molte esposizioni degli Elementi di Euclide comparse a quest' epoca in Italia, ad uso delle scuole, qualche cosa di quelle de' tre distinti geometri Borelli, Viviani, e Grandi.

Il primo di questi era passato dall' Università di Messina ad insegnar Matematiche in quella di Pisa; ed allora fra' dotti geometri onde abbondava l' Ita-

lia, usciti dalla scuola del Galilei, trattavasi della restaurazione del libro V° di Euclide. Surta n' era l' occasione da una scrittura intitolata, *Principio della quinta giornata*, dal Galilei, negli ultimi giorni di sua vita, dettata al di lui discepolo Torricelli; e questi aveala presentata al Cardinal Leopoldo de' Medici, il quale aveane fatto dono al Viviani, altro discepolo del Galilei; e vi si conteneano dimostrazioni delle definizioni quinta, e settima del libro V° di Euclide, siccome delle converse loro. Il Borelli, entrato anch' esso a parte in simil lavoro, e trovando, a suo avviso, poco concludente quanto aveano fino a quell' ora gli altri geometri fatto a tal proposito, immaginò una nuova maniera di trattar delle proporzioni, e delle proporzionali quantità. Ma siccome chi ha dato il passo d' innovare una cosa negli Elementi Euclidei, difficilmente può a quella sola arrestarsi, e non riformare il tutto, il Borelli però li rifuse da capo, distribuendone le materie in nove libri, che furono stampati in Pisa nel 1658 *in 4*, con l' epigrafe: *Euclides Restitutus, sive prisca Geometriae Elementa brevius, et facilius contexta, in quibus praecipue Proportionum theoriae nova, firmiorique methodo promuntur*. Tutt' i suoi sforzi non indussero però miglioramenti negli Elementi, nè quanto al rigore, nè quanto all' ordine; e la sua restaurazione del libro V°, lungi dal produrre l' effetto, che aveasi proposto, cioè di agevolarne le teoriche, le ebbe

per contrario sovvertite e confuse; che però egli meritò i rimproveri del Barrow, e di Roberto Simson.

La scrittura del Galilei, della quale dicevamo pur dianzi, diede occasione al Viviani, uno de' più gran geometri italiani del secolo XVII°, a distender da capo il libro V° di Euclide, com'egli stesso lo afferma, nell' indirizzo al summentovato cardinale Arciduca di questa sua opera stampata in Firenze nel 1674, e di nuovo nello stesso luogo nel 1690. Da ciò per ventura egli fu mosso a trattar poscia un'esposizione degli Elementi geometrici di Euclide ad uso delle scuole, cioè de' primi sei libri, e dell'XI°, e XII°, ove, oltre al libro V° del geometra greco, si trova parimente la poc' anzi detta sua scienza universale delle proporzioni, ed il principio della quinta giornata del Galilei [39]. Nondimeno, tranne queste due ultime cose, che debbono attirar l' attenzione de' geometri, gli Elementi geometrici del Viviani, per la precisione commendevolissimi, e per la purità del loro linguaggio, non contengono alcuna utile, e nuova rettificazione osservabile del testo di Euclide. Siffatti Elementi furono per ben due volte messi a stampa in Firenze in due volumetti iu 12, la pri-

---

[39] Di questo lavoro del Viviani non fa menzione il Montucla. Non sappiamo poi d' onde l' Haym abbia tratto, ch' essi *solo per una gran parte* a quello si appartengano, senza indicare chi vi avesse collaborato (*Vedi* Biblioteca Italiana), mentre il Fabroni, evidentemente ne parla ne' seguenti termini: *Utilissimae quoque artis vias tradere voluit suis civibus, editoque libro, qui inscribitur* : Elementi piani, e solidi di Euclide, *effecit ut omnia facile et expedite percipi et comprehendi possent* (Vitae italorum vol. I. — *Vivianius*).

ma, cioè, nel 1690, e l'altra nel 1718. E formerà sempre un grande elogio de' medesimi, e della nostra Italia, che per pubblico incarico fossero stati riprodotti dal Lorgna, ad uso del collegio militare di Verona; e finalmente dal dotto P. Cossali ancor di nuovo fatti stampare nel 1805 in Verona, per quel liceo dipartimentale, con una sua giunta sulle figure isoperimetre.

Ad una semplice esposizione del testo de' sei primi libri, e de'tre ultimi degli Elementi di Euclide, si restrinse del pari l'abate camaldolese Guido Grandi, celebre matematico, ed autore di molte opere piene di profonda dottrina geometrica, che gli meritarono la stima de'principali matematici di Europa. Quest' opera è stata perciò più volte in seguito ristampata; ed è ancor presentemente il libro d'istituzione geometrica nelle migliori scuole d' Italia. È però da notarsi, ch'egli vi suppresse l'enunciazione astratta di ciascuna proposizione, da Euclide giudiziosamente messavi, perchè si ritenessero con più facilità da' giovani a mente, e si esprimessero senza bisogno di figura: che però il Cagnoli, nel farli ristampare, nel *Corso di Matematiche*, che nel 1806 fece compilare ad uso delle scuole di Modena, ch' ei dirigeva, ve le restituì, perfezionando così il lavoro geometrico del Grandi.

Da quanto si è quì brevemente accennato, sulle principali esposizioni degli Elementi di Euclide, pubblicate più volte in Italia, per cura di distinti, e

rinomati matematici, oltre le tante altre semplici ristampe della versione del Commadini, pe' primi sei libri, ed XI°, e XII°, o di modificazioni di essa, potrà rilevarsi, che presso la nostra culta, e giudiziosa nazione, siensi sempre tenuti in altissimo pregio gli Elementi di Euclide, e con grandissimo profitto insegnati nelle scuole. Nè però debbe tornarle a scorno, se ora l'arte di compilare, e produrre istituzioni essendo resa troppo volgare, persone di poco conto vi abbiano pubblicati Elementi di nessun sapore geometrico, i quali anzi che far apprendere la scienza, e stabilire ne' giovani lo spirito di rigore, e di esattezza di dimostrare, che rimane in essi ancorchè più oltre non curino percorrerla, producono un risultamento affatto contrario. Ma gli Elementi di Euclide staran sempre come il monumento più perfetto dell' umana ragione, e saranno riprodotti, ed insegnati per l'innanzi, come per ben sei secoli per l'addietro il sono stato; mentre le informi compilazioni de' rapsodi, e contrafattori di essi appariscono, e succedonsi come fugaci meteore, che in breve tempo dileguansi, non rimanendo di essi nè vestigio, nè memoria.

EDIZIONI CLASSICHE DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE FATTE IN INGHILTERRA.

Nel 1570 fu pubblicata in Londra da Giovanni Dee, con sua prefazione, l' Euclide inglese del Billingsley: e nel 1620 vi s' impresse quello greco-latino del Brigg, col titolo, Ευκλειδου Στοιχειων Βιβλια ιγ. cioè, *Elementorum Euclidis libri tredecim*. Dall'epigrafe del libro apparisce, che tal versione, corretta in alcuni luoghi col confronto di altri greci esemplari, dovea esser calcata su quella del Commandini; ma non sapremmo dire, perchè mai di que' tredici libri non furono stampati, che solamente i primi sei, da Guglielmo Jones in Londra. Pur dobbiamo avvertire, che il Brigg non sembra, col suo confronto, aver fatta migliorare la versione dell' eruditissimo geometra italiano, anzi che averla in qualche luogo deteriorata. Vaglia per esempio la definizione 7. del libro I°, cioè quella della *superficie piana*, ove si trova intrusa la voce *rectas*, che rende fallace tal definizione [4°]. Cotesto equivoco s'incontra similmente in alcune altre esposizioni degli Elementi Euclidei, ultimamente pubblicate da poco accorti editori.

Nel 1659 l' insigne matematico Isacco Barrow professore Lucasiano nel collegio di Cambrige pub-

---

4° Per porre a confronto questa definizione, con quella esatta da noi recata, la riporteremo qui; ed essa viene così espressa: *superficies plana est, quae ex aequo intra suas lineas rectas interiacet.*

blicò, ridotti ad ammirabile brevità, in un piccol volume in 12., i tredici libri di Euclide, ed i due d' Ipsicle. Quest' opera commendevole per l' esattezza dell' esposizione, fu varie volte ristampata con correzioni dell' autore; e nelle posteriori edizioni, trovasi aggiunto ancora in fine il libro de' *Dati*. Quivi, come nel suo Archimede, Apollonio, e Teodosio, usa l' autore di molte simboliche indicazioni, per esprimersi con impareggiabile laconismo: ma questo offende talvolta, e degenera sovente in oscurità. E per la stessa ragione il Barrow, ad imitazione del Grandi, suppresse l'enunciazione astratta delle proposizioni. Al suo libro V° egli aggiunse parimente le proposizioni sulle ragioni disuguali, delle quali abbiamo di sopra parlato.

Le lezioni geometriche da questo matematico egregio recitate dalla cattedra suddetta, per gli anni 1664, .. 65, .. 66, che furono pubblicate in Londra dopo la di lui morte, sono piene di profonda dottrina, e meritano esser lette con attenzione dai cultori della Geometria. A queste egli altre ne aveva aggiunte, a compimento de' suoi libri Euclidei, nelle quali esponeva il metodo da Archimede adoperato, per le analisi de' teoremi sulla misura del cerchio, e sulla sfera, sul cilindro, e 'l cono.

Passeremo sopra ad altre pubblicazioni degli Elementi di Euclide fatte in Inghilterra, per dir qualche cosa della superba edizione greco-latina di es-

si eseguita a cura del celebre matematico inglese Davide Gregory, professore Saviliano, per le stampe di Oxford. Siffatta edizione è uno de' tre grandi monumenti dalla nazione inglese innalzati alla Geometria, e che mostrano il giusto, e ben sentito rispetto dalla medesima sempre conservato, per le opere degli antichi geometri. Altro monumento egli è l'Apollonio di Halley; ed un terzo l' elegantissimo Archimede del dotto veronese Torelli, stampati entrambi nel luogo stesso, il primo nel 1710, l' altro nel 1792. La versione del Gregory è calcata eziandio su quella di Commandini, ma confrontata con altri greci esemplari; ed a piè di pagina presenta varie brevi riflessioni dell' espositore inglese. Una ben dotta prefazione va innanzi a quest' opera, a cui si aggiungono in fine il libro de' *Dati*, colla prefazione del geometra Marino, della quale facemmo già parola, e quegli altri trattati scientifici a noi pervenuti, e che ad Euclide si riferiscono, cioè, *Introductio harmonica — Sectio Canonis — Phaenomena — Optica — Catoptrica — de Divisionibus* (quello stesso di cui è stato detto a pag. XLVII.); ed un frammento *de levi*, *et ponderoso*.

Quasi al medesimo tempo il Keill, matematico di distinzione uscito dalla scuola del Newton, pubblicò, anche in Oxford, ad uso delle scuole d'Inghilterra i suoi Elementi geometrici di Euclide [41],

---

[41] Il Montucla nella sua storia delle Matematiche stampata la pri-

limitandoli a' primi sei libri, e l' XI°, e XII°, secondo la versione del Commandini in qualche tratto modificata; e vi aggiunse sulla fine tre brevi ed eleganti trattati, l' uno di *Trigonometria rettilinea*, l' altro di *Trigonometria sferica*, e 'l terzo de' *Logaritmi*. Questo libro sommamente stimabile è stato assai volte di seguito nel luogo stesso ristampato, e con quel grado di accuratezza, che debbe oltremodo valutarsi ne' libri elementari, principalmente di Matematica. Degna di esser letta è la bella prefazione di questo geometra al suo lavoro.

Alle dotte, ed utili fatiche di sì illustri compatriotti volle, all' epoca stessa, aggiugner parimente le sue l' egregio geometra inglese Edmondo Scharburgh, il quale pubblicò in Oxford, nel 1705, in suo linguaggio, i sei primi libri degli Elementi di Euclide, con annotazioni, e supplimenti non dispregevoli.

Or già da sei secoli erasi posto mano a tradurre in varie lingue gli Elementi di Euclide: numerose versioni, ed esposizioni parecchie, e comenti moltissimi si eran fatti sovr' essi da valenti geometri; e quali in un luogo, quali in un altro aveano avvertita, e corretta qualche incongruenza nel testo greco di Teone. L' Euclide del Nassireddin, e la

ma volta, riporta la prima edizione dell' Euclide del Keill al 1706, e nella ristampa, che intraprese di tal sua elaboratissima opera la dice del 1701: l' Heilbronner poi la dà come uscita alla luce nel 1715. Noi non possiamo dir nulla su di ciò, non essendoci nè men riescito vedere alcuna di queste edizioni.

versione di Campano, in alcuni luoghi differivano dall' Euclide di Teone, e però da molte versioni fatte su questo: ma la ragione stava pei primi. Il Clavio avea già cambiato in molte parti il testo di Euclide, e principalmente nel libro V°, come vedrassi nelle note in fine di questa nostra esposizione degli Elementi, ed avea in oltre mosso alcun dubbio sulla definizione della ragione composta. Il Galilei, punto non discordando, avea proposta la vera definizione di tal ragione nel principio della sua *quinta giornata*, della quale abbiam detto di sopra; ed altri geometri lo avean seguito. Fra costoro il poc' anzi mentovato inglese Scharburgh dichiarò apertamente, non poter tal definizione, come nel testo greco s' incontra, esser la vera di Euclide, e dover questa venir espressa in termini analoghi alla definizione decima del libro V°. Non pertanto in luogo di emendarla, egli l' aveva conformemente ritenuta. Non altramente il Keill, comunque avesse seguita la versione del Commandini, erasene tuttavia, e non fuor di proposito, in alcun luogo allontanato. Niuno intanto avea pronunziato chiaramente, dovere il testo di Euclide essere stato in parecchi luoghi corrotto; ed esser mestieri assolutamente alla sua vera lezione ridurlo, con rilevar questi difetti, e proccurar di correggerli, secondo la mente del gran geometra greco, e poter ciò non altramente ottenersi, che seguendo con delicato rigore le tracce, che ne restano dell' opera di lui. Co-

tal felice idea surse la prima volta in mente a Roberto Simson, che annoverar dobbiamo tra' sommi geometri d' Inghilterra, nel secolo XVIII°, gran coltivatore, e promotore della Geometria degli antichi, a cui siam debitori nulla meno, che di una giudiziosa restituzione de' due libri di Apollonio Pergeo *Locorum Planorum*, degli altri due *de Determinata Sectione*, cui aggiunse due altri di propria escogitazione, e de' *Porismi* di Euclide, dall' ingiuria de' tempi a noi tolti. Egli dunque pubblicò nel 1756, per le stampe di Glascovia, in un vol. in 4. i primi sei libri, e l' XI°, e XII°, degli Elementi, col titolo: *Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione Federici Commandini, sublatis iis quibus olim libri hi a Theone, aliisve, vitiati sunt*, soggiungendo in fine alcune *note critiche*, e *geometriche*, ove rende ragione di tutte quelle mutazioni, ch' egli avea creduto dover fare sul testo dell' Euclide di Teone. Una tale opera, tradotta poscia da lui stesso in idioma inglese, e ristampata in Edimburgo nel 1775, con un trattato aggiuntovi di *Trigonometria Piana, e Sferica*, e con una esposizione del *libro de' Dati* di Euclide, divenne il libro classico di Geometria nelle scuole d' Inghilterra: prendendo quel posto, che prima era stato, nella istituzione geometrica, occupato dall' Euclide del Keill: e le molte edizioni fattene dimostrano abbastanza il merito non ordinario di un tal libro, e 'l pregio grandissi-

mo in cui quella nazione ragionevolmente il tiene [41].

Dall' esposizione fatta in quest' ultimo articolo si raccoglie, che in Inghilterra sonosi mai sempre avuti in altissimo conto gli Elementi di Euclide; e che nelle scuole inglesi non è stato per ventura conosciuto, ne forse ancora si conosca altro libro elementare di Geometria. A tal rigorosa maniera d' istituire la gioventù, debbesi, come ben osserva il Montucla, attribuir la ragione, che l' Inghilterra vede schiuder meno frequenti quelle opere, che facilitano la scienza snervandola; e che quivi mai non mancarono geometri egregj, le opere de' quali sono scritte costantemente colla più rigorosa dirittura, e precisione.

---

41 Fino al 1814, ch' è l' edizione, che ne abbiamo, si era ristampato ben sedici volte.

DELLA PRESENTE ESPOSIZIONE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI DI EUCLIDE.

Giunto al termine di dover dire pur qualche cosa di questa mia esposizione degli Elementi geometrici di Euclide: stimo a proposito indicare primamente i motivi, che a siffatto lavoro mi determinarono. Essendo stato chiamato a sostener la cattedra di *Sintesi* nella nostra Università degli studj, dal 1803 fino al 1806, formando parte di quella la Geometria di Euclide, tolsi a riscontrare accuratamente moltissime versioni di questa, ed assai comenti, che dottissimi geometri vi apposero. Una riforma intervenne ne' nostri Studj, nel 1806, per la quale, passato da tale cattedra all'altra di *Analisi algebrica*, abbandonai del tutto il pensiero di queste occupazioni per allora; nè forse mai più le avrei ripigliate. Ma dovendosi, per ordine del governo, stabilire i libri necessarj alla istituzione della gioventù ne' collegj del regno, che andavansi a mano a mano fondando, una commissione a ciò nominata, ove fra gli altri onorevoli soggetti sedea l'insigne nostro Fergola, m'ingiunse di compiere un *Corso di Matematiche* ad uso di quelli stabilimenti. Accettato l' incarico, pensai di presente esser necessario ricalcare le tracce del Simson in quanto alla Geometria elementare. Niuno avea prima di me fatta pur menzione in Italia di questo geometra; e l' egregia sua opera sugli Elementi Euclidei vi rima-

nea presso che ignorata. E veramente io avrei tradotto di peso in italiano il suo libro, e fattane una parte del *Corso geometrico*, che meditava : ma fui presto ad avvedermi, che sul testo di Euclide da lui dato, altro ancora, oltre le sue correzioni, restava a fare; e che alcuna di esse bisognava sbandirla come soverchio ricercata : in somma fui indotto a dilungarmi da questa idea, per tutte quelle ragioni, che riconoscerà chiunque porrassi a fare il confronto di questo mio Euclide con quello del geometra inglese, delle quali ravviseransi le più momentose nelle *Note*, che ad imitazione del Simson aggiunsi in fine de' miei Elementi Euclidei.

Or da quanto si è precedentemente detto rilevasi, che dopo la versione del Commandini degli Elementi di Euclide dal greco, tutti coloro, che ne intrapresero altre edizioni con comenti, o con nuove esposizioni, non esclusi il Brigg, il Gregory, il Keill, e 'l Simson, a quella si erano attenuti, limitandosi al più a confrontarla solamente di nuovo col testo greco in qualche luogo, ove stimarono necessarie le loro cure ulteriori. Nè io vidi per me ragione singolare da operar diversamente, ed appigliarmi ad inutile, e faticoso lavoro: nè dalle mie occupazioni rimaneami tanto tempo, da disporne a far nuova intera versione di un libro, per comune sentimento già ben tradotto. Come gli altri adunque io mi posi col Commandini, e ne' luoghi più importanti, o dubbiosi ne confrontai la versione col

testo greco di Ervagio, del Brigg, e del Gregory.

Con questi mezzi produssi la prima volta in pubblico, nel 1810, la mia esposizione degli Elementi di Euclide [43]: la ristampai poscia nel seguente anno con alquante modificazioni, e quelle *Note critiche, e geometriche* vi aggiunsi, che avea fin dalla prima edizione promesse; ma che non giunsi a tempo per inserirvele, mentre pria, che terminasse la stampa del vol. II°. di essa era stato obbligato a rifar quella del vol. I°. Susseguentemente diedi del mio libro tre altre edizioni, negli anni 1812, 1814, 1816, nelle quali mi accadde di far sempre alcun altro cambiamento, o essenzial correzione sul testo greco. Nel pubblicar poi per la sesta volta questi Elementi nel 1818, mi diedi a riveder da capo, e minutamente la mia versione, per metterla, il più che per me si potesse, in esatta corrispondenza col-

---

[43] Una tale edizione fu eseguita d' ordine del Governo, ed a sue spese nella stamperia reale, come rilevasi dalla seguente lettera del ministro dell' Interno diretta al Fergola. — *Palazzo 18. Ottobre 1809* — Il Ministro dell' Interno *al sig. Nicola Fergola*. — » Essendo ne-
» cessario, che si dia immediatamente alle stampe, per l' uso de' Rea-
» li Collegj il *Corso elementare delle Matematiche*, e trovandosi già
» preparato il lavoro, per la parte geometrica, da' professori Flauti, e
» Giannattasio, come VSS. illustr. mi riferì con rapporto de' 10 mag-
» gio corrente anno, cioè dal primo la versione italiana de' *primi sei*
» *libri di Euclide*, *la Geometria Solida* rettificata, ed ampliata, e le
» *Trigonometrie*, e dall' altro i *Conici*, ho disposto, che l' impres-
» sione di queste opere si faccia subito nella stamperia Reale — Comu-
» nico tutto ciò a VSS. illustr., per l' intelligenza de' medesimi, e per
» l' adempimento corrispondente. — Gradisca gli attestati della mia di-
» stintissima stima. — *G. Arciv. di Taranto*.

l' originale di Euclide; ed alcune altre note allora aggiunsi, ove credei esservene ancora bisogno. Però m' indussi a farne tirare un numero di esemplari in 4°. Nè senza nuove cure furono eseguite le ristampe seguenti a questa, negli anni 1819, 1821, 1823, 1827, comunque per trovarmi variamente impiegato, ed occupato, avessi dovuto affidarne ad altri la pubblicazione: e di quest' ultima ne furon pur tirati alcuni esemplari in 4°. Nel riprodurli in seguito per l' undecima volta nel 1829 li rividi, e nuove modificazioni vi feci, le quali sebbene non essenziali, e sul testo, non pertanto riguardavano a render l' esposizione sempre più chiara, e precisa. Le due seguenti volte dovetti abbandonare la cura della stampa ad un mio allievo, della cui attenzione non essendo rimasto ben soddisfatto, nel pubblicarli per la decimaquarta volta dovei, non ostante i miei impacci, e la debilitazione degli occhi, riassumer la penosa cura della ristampa, di nuovo confrontandola col testo, e con le versioni, e comenti principali, che di esso sonosi fatti: ciò diede luogo a qualche nuova modificazione, ed a qualche altra noterella al proposito della medesima. Nell' edizione seguente feci pure talun' altra piccola rettifica del testo, che ritenni senza la minima alterazione nella seguente, in cui solo qualche cosa modificai nelle *Note*. Or corso ancora un altro periodo da questa, ed avendomi proposto pubblicare tutto quel prezioso materiale dal Fergola, e da' suoi più

distinti allievi preparato per la sua scuola, nella Geometria, nell' Analisi sublime, e nella Meccanica, ho di nuovo riveduto pur questo primo lavoro elementare, da che ha il libro V° ricevuta la giunta di qualche altro teorema, per sempre più dichiarare la natura delle proporzioni, e quel principio semplicissimo, che ne costituisce il criterio; come ancora per talun nuovo caso di proporzionalità, che meritava esser considerato, per l' uso vantaggioso di esso. Ed alle Note alcuna cosa ho risecata per riportarla altrove, ora che ne aveva l' opportunità, e talun' altra ne ho aggiunta.

Ma siami quì permesso soggiugnere, che mentr' io imprendeva questa mia esposizione degli Elementi Euclidei, erano essi pur nelle scuole d' Italia nel massimo abbandono decaduti, cedendo il luogo ad istituzioni di sbiadato color geometrico [44]: e che quindi debbo contentissimo chiamarmi del frutto ricavatone, con aver veduto di nuovo introdotta in quelle la buona istituzione in tali scienze.

---

[44] Questa fugace aberrazione per noi altri italiani, dovuta meno a nostra intenzione, che all' occupazione dello straniero, e ad essersi introdotti all' insegnamento delle Matematiche taluni regolarmente ad esso meno atti, può dirsi ora interamente cessata: nè un qualche residuo della medesima in talune nostre scuole di secondaria istituzione potrà detrarre al merito, che presso noi la Geometria di Euclide universalmente si coltivi.

DELLA VERSIONE DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE FATTA DAL PEYRARD IN LATINO, ED IN FRANCESE.

I tempi in cui viviamo, e l'autorità di una delle principali accademie di Europa, mi obbligano a far quì parola della più recente versione degli Elementi di Euclide eseguita in Francia, sopra un nuovo codice, dal sig. Peyrard; della quale eccone brevemente la storia.

Il Monge, distintissimo matematico francese, quando le armi di sua nazione occuparon Roma la prima volta, fra' i libri più rari della biblioteca Vaticana, raccolse, per inviarlo a Parigi, un codice de' tredici libri degli Elementi di Euclide, col libro de' *Dati*, ed i due libri d'Ipsicle Alessandrino, segnato col *n*. 190. Altri codici degli Elementi stessi furon tolti ad altre biblioteche di Europa; sicchè nella biblioteca imperiale di Parigi fino al numero di 23 se ne raccolsero. Con tanta ricchezza di codici Euclidei, pose mano il Peyrard ad una versione del testo di Euclide da capo a fondo, come se altra mai non ne fosse comparsa. Il codice sopra descritto, da lui riputato il più antico, e per ventura del IX° secolo, venne prescelto come lo più perfetto.

Non era per anco venuta in luce questa versione, e nulladimeno più volte ne avean fatta menzione i giornali dotti; e le classi di letteratura, e di matematiche dell'Istituto di Francia erano state ancor più volte richieste dal governo del loro parere, sul merito di essa, che con gran lusso, e dispen-

dio preparavasi a venir fuora, la quale cosa finalmente avvenne dal 1814 al 1818 [45].

Il traduttore Peyrard, attribuendo, come si è detto, al IX° secolo il codice da lui prescelto, viene a giudicarlo anteriore a tutti gli altri: arbitrario giudizio, in seguito del quale egli reputa di Euclide tutto ciò, che in tal codice trova dagli altri discordante; e quindi assai sovente, e del tutto condanna que' luoghi altrui, che col suo non concordano. Si ravvisa poi, ch' ei prenda nell' opera sua la parte di puro traduttore, e non di geometra: imperocchè trattenendosi a dilungo a diciferar le parole, tralascia, contra il dovere, di esaminar con diligenza, se in tal codice s' incontrino tutti, o in parte corretti que' luoghi, ove il Simson, ed altri ancora prima di lui avean trovato corrotto il testo degli Elementi; o veramente portando egli contraria opinione, avria pur dovuto ragionarla, per indurne a credere, che una serie di distintissimi geometri sia stata uniformemente tratta in inganno. Niuna di tali cose ha fatte il traduttor francese: egli tutto al più prende a far semplice confronto del suo codice con l' Euclide greco-latino datoci dal Gregory da ben più di un secolo, niuna ragione tenendo di quanto in tal non corto intervallo altri avesser mai potuto fare; e dando in tal guisa un' aperta mentita all' o-

[45] Les Oeuvres d' Euclide, *en grec, latin, et français; par M. F Peyrard — Paris* 1814 - 18, 3 vol. in 4.

pinione, che la dotta Europa, ed i più illustri fra' suoi stessi compratriotti avea concepita del lavoro del Simson sugli Elementi di Euclide [46].

Adunque l'Euclide del Peyrard, anzi che sospignere gli Elementi al riacquisto dell' antica perfezione, gli allontana di fatto da quella; e però non saremo a lui per alcun modo tenuti della doppia traduzione, che a gran fatica ha voluto darne del suo codice. Nè crediamo ora più al proposito di entrare in più minuti particolari su di essa, come in altre edizioni facemmo, nelle quali, chi pur volesse, potrà veder prodotti que'luoghi della versione del Peyrard, che sono manifestamente errati: e ci riserbiam solo di farne menzione in talune delle nostre *note critiche*, e *geometriche*.

E quì aggiugneremo, che il tempo il quale giudica con la ragione universale, e senza prevenzione dell' utilità delle produzioni dell' umano ingegno, ha già fatto ormai dimenticare un tal lavoro eseguito con grande apparato, e dispendio.

[46] Basta quì riportare, la sola opinione del Montucla, il quale termina il suo articolo sugli ottimi espositori, e comentatori di Euclide, dicendo: » Enfin pour terminer une recension, qui deviendroit fastidieuse, et nous borner à ce qu' il y a de mieux. nous citerons l'édition latine des VIII livres d' *Euclide*, donné en 1756 (*a Glasgow*, » *in* 4.) par M, *Robert Simson*. Il y en a eu une édition en anglais. » M. *Sinson* qui a particulièrement cultivé la géométrie ancienne, y » rétablit diverses démonstrations, qu' il montre n' être pas entiérement conformes au vrai sens d' *Euclide*. Elle fait d' ailleurs honneur » aux presses de *Glasgow*; et c' est aujourd'-hui le livre classique » des Elémens de Géométrie dans les Universités angloises «. (*Hist. des Mathem*. part. 1. lib. IV. n.2.)

OPINIONI DI ALCUNI DOTTI SUL MERITO DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

Da quanto è detto infino ad ora si dedurrebbe a bastanza l' alto valore degli Elementi di Euclide: ma la gloriosa opinione, che ne portarono i sommi geometri antichi, e moderni tutti, decide assolutamente sul loro merito; e noi non la finiremmo se volessimo quì soltanto accennarne gli elogj. Tutti gli antichi scrittori di matematiche verità si fondarono sovr'essi; vagliano tra' moltissimi Archimede, ed Apollonio, i quali, nelle loro geometriche inchieste, prendono le deduzioni Euclidee come principj convenuti, e rigorosamente dimostrati. Già sopra dicevamo, che Pappo gli dà pregio di *geometra accurato*, e gli attribuisce di *non essersi mai ingannato*. Proclo non si stanca di commendarlo: *Volumina* Euclidis (egli dice in alcun luogo) *admirandae diligentiae peritaeque cuiusdam considerationis plena*: ed altrove sembra esclamare: *Quis non Euclidis Elementa admiretur, in quibus superiorum Elementa omni genere laudis longissime superavit*.

Infiniti sono i lodatori moderni: e noi pel meglio rimandiamo i curiosi amatori alle dottissime prefazioni, che accompagnano le esposizioni del Clavio, del Gregory, e del Keill. Nelle prolusioni dell'egregio Errico Savilio[47], da esso pubblicate nel

[47] Quest' uomo molto benemerito della Geometria per le sue cognizioni, lo volle anch' essere fondando a sue spese due cattedre di Ma-

1610 leggonsi trascritte le opinioni, che tennero al proposito Pietro Ramo, e Cardano: il primo de' quali, parlando degli Elementi di Euclide, si esprime così: *Nullus paralogismus, nulla pseudographia, in totis Elementis, nobis quanquam severe inquirentibus, animadverti potuit* [48]. L'altro, nel libro XIII°. *de subtilitate*, se gli accorda dicendo: *quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta, ut nullum opus iure huic aliud*

---

tematiche nell' Università di Oxford, per ciascuna delle quali il professore prende però nome di *Saviliano*; come del pari dicesi *Lucasiano* l'altro, che nell'Università di Cambrige sostiene la cattedra di Matematiche fondatavi dal *Lucas*. Anche fra noi non sono mancati uomini illustri, che abbiano cercato rendere al pubblico simili benefizj: e 'l nostro benemerito, e dotto concittadino Giuseppe Valletta fondò a sue spese nel 1679 nella nostra Università la cattedra di lingua greca, che volle conferita a Gregorio Messere di *Terre Messapica*, e non di *Taranto*, come erroneamente il dice l' Origlia, soggetto eruditissimo, e profondo nella conoscenza del greco linguaggio, da venir riputato tra' primi, che vantasse allora la nostra Italia. L'esempio del Valletta venne imitato dopo alcun tempo da Bartolomeo Intieri, che toscano di origine, era stato tra noi educato, il quale istituì la cattedra di *Economia pubblica, e di commercio*, e conferilla la prima volta al dottissimo nostro filosofo l'ab. Genovesi. Ma di tal generoso procedimento del Valletta non resta, che fugace memoria conservataci dal Mabillon, nel suo *Iter italicum litterarium, a pag. 103*, ove dico: *idem* (Jos. Valletta) *etiam de suo stipendium Gregorio Messerio presbytero Brundusino, in litteris graecis versatissimo suppeditavit, ad graecas litteras publice docendas*, non avendone nè men fatto cenno l'Origlia al proposito del Messere; e la cattedra creata dall' Intieri non è conosciuta, che da pochissimi amatori delle memorie patrie. Lo stesso per altre simiglianti benefiche istituzioni delle quali non apparisce più vestigio alcuno. Qual maraviglia dunque, se di esse più non se ne vegga fatte a' tempi nostri?

[48] *Scholae Mathematicae* lib. II. pag. 75.

comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quaestionibus videantur posse a vero falsum discernere qui Euclidem habent familiarem. Volendo il Gregory, nella prefazione al suo Euclide, riportar la poc' anzi trascritta opinione del Cardano, le fa precedere queste parole: *Corpus hoc Elementorum ea claritate et evidentia, et iudicio ac fortitudine compactum est, ut singulae in iis propositiones, iam a bis mille annis ab omnibus habeantur pro evidentibus, et pro talibus ab omnibus passim citentur.* Il Newton, grande ammiratore dell'ordine, e del metodo Euclideo, doleasi, quando era già geometra consumato, *quod perlecto non dum Euclide ea diligentia quae adhiberi in tanto auctore debuerat, ad Cartesium aliosque propera quadam cura descendisset*. Ed il Wolfio accordandosi all'opinione del suo maestro Leibnitz, rende la testimonianza, che segue. *Praeter nos alii etiam mathematici agnoverant, reformatores Elementorum Euclidis non fuisse in ausu suo satis felices; sed Euclidis Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse Leibnitio sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriae concinnandis operam darem, ipsique referrem, me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriae digererum, quo usus est Bernardus Lamy; sed nunquam hoc fieri potuisse, nisi quaedam assumerem absque demonstratione quae essent demonstranda, vel in demon-*

strando , ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta [49]. Ed egli stesso aggiugne : *Opus hoc illustre inter ea eminet, quae ex antiquitate ad nos pervenerunt ita ut Providentiae Divinae tribuendum sit, quod iniuria temporum non interciderit* [50].

A siffatte momentose autorità di sommi uomini , non è certamente fuor di proposito aggiugnere ciò, che il cav. Pindemonte con molta precisione dice del Torelli , nel bell' elogio, che ne scrisse , e che leggesi nel vol.II.*p.*1. degli *Atti della Società Italiana* : poichè in tal suo dire comprendonsi non solamente le autorità di altri sommi uomini ; ma benanche ottimi precetti di studj matematici . » Ri-
» volse l' animo da principio anch' egli a quel me-
» todo, che per altri pregi risplende , e tanto tiene
» ora, veduti ch' egli ebbe quelli Elementi di Geo-
» metria, che mostrare si sogliono nelle scuole ; ma
» poi mutò di consiglio. Perchè avvenutosi in Vi-
» cenza con dotto matematico che lo avvisò di vol-
» gere addietro,per rifar meglio la strada, che corsa
» aveva, e forse ancora ricordatosi di Newton, che
» ritornò su i Geometri antichi da lui troppo to-
» sto, per l' amor dell' Algebra abbandonati, prese
» a studiare di nuovo Euclide, ma in Euclide me-
» desimo, secondo il detto dello stesso Newton, e

---

[49] *De praecipuis scriptis Mathematicis* cap. III.
[50] *Ibid.* §. 2.

» questo fece cogli altri tutti, e singolarmente con
» Archimede, di cui tanto invaghì, che gli tenne
» per sempre la più irreprensibile fedeltà. E quan-
» to ad Euclide, come riso aveva prima di se, così
» degli altri era solito ridere, che su i moderni libri
» lo studiano, e di quegli autori che pretesero ri-
» ordinarlo, rompendo quella catena mirabile di
» proposizioni, che passano necessariamente dall'u-
» na nell' altra, e che formando un ordine, di cui
» non può darsi il più nobile, formano insieme la
» delizia degli amatori del rigor geometrico; ri-
» gore che solo può vincere uno spirito risoluto di
» non si dare all' evidenza. Ma questo è il vezzo
» comune ora, di agevolare la scienza debilitan-
» dola; al che non poco contribuisce quella na-
» zione, per altro illustre, e grandissima, e non
» mai lodata abbastanza, che fa di assicurarsi in
» tal modo la da lei affettata monarchia delle let-
» tere, e che insegna ad abbandonare le lingue an-
» tiche, per far parlare alle scienze la propria so-
» lo: mentre la sua rivale aspira tuttavia ad una
» gloria negli studj men rilucente, ma più ferma e
» più da' savj ammirata; e le antiche lingue colti-
» va, ed ancora conserva il gusto della severa Geo-
» metria. Colui che Archimede intenderà bene,
» dice il gran Leibnitz, stimerà meno le scoperte
» de' moderni più rinomati «. Ed a questo propo-
sito non sarà fuori luogo il riportare il detto stes-
so del Torelli, nella prefazione al suo Archimede:

Non sum nescius, quae antiqui pertractarunt, eadem a recentioribus pertractata esse, et quotidie pertractari; sed, absit dicto invidia, labore prorsus irrito. Si enim Euclides, ut de hoc uno loquar, aliqua in parte peccat, cur non redarguis. Sin autem in omnibus sibi constat, cur eadem mihi aliis verbis proponis? At quaedam scilicet recentiores detorquent, invertunt, immutant. Ita quidem existimo: sed tamen dum hoc faciunt, quid, quaeso, aliud agunt, quam ut sarcinatores imitentur, qui feminarum vestes quotannis refingunt, ut eas ad saeculi mores accomodent? De brevitate autem, quam tantopere iactant, quod dicunt, id nihil est, cum breve nihil dici debeat, quod sine explicatione aliqua intelligi nequit, et minus perspicue traditur. E prima ancora il Keill avea detto lo stesso nella prefazione al suo Euclide.

Non ammetterebbe termine questo argomento: per dargliene alcuno, trascriveremo quì ciò, che il Montucla, ed altri storici recenti delle Matematiche han detto di accordo a questo proposito. Il Montucla dunque esprimesi nel modo seguente [51]: » C' est » sur-tout à ses Élémens, qu' Euclide doit la célé» brité de son nom. Il ramassa dans cet ouvrage le » meilleur encore de tous ceux de ce genre, les vé» rités élémentaires de la Géométrie découvertes » avant lui. Il y mit cet enchaînement si admiré » par les amateurs de la riguer géométrique, et qui

51 Histoire des Mathématiques, *Part. 1. lib. 4.*

» est tel, qu'il n' y a aucune proposition qni n'ait » des rapports nécessaires avec celles qui la précè- » dent, ou qui la suivent. En vain divers géo- » mètres à qui l' arrangement d' Euclide a déplu, » ont tâché de le réformer, sans porter atteinte à » la force des démonstrations. Leurs efforts impuis- » sans ont fait voir combien il est difficile de sub- » stituer à la chaîne formée par l' ancien géomè- » tre, une autre aussi ferme et aussi solide «. Ed il Bossut, parlando degli Elementi di Enclide, dice [52]. » Jamais livre de science n' a eu un succés com- » parable à celui des élémens d' Euclide. Ils ont » été enseignés exclusivement, pendant plusienrs » siècles dans toutes les écoles de Mathématiques, » traduits et commentés dans toutes les langues : » preuve certaine de leur excellence «. Ma dopo ciò egli seppe più ammirarli, che apprezzarli, ed imitarli.

Finalmente è degno di esser qui recato ciò, che sul proposito dice con molta verità, e precisione l'ab. Andres, nella sna *Storia di ogni Letteratura*, tanto più che il gindizio, ch' egli dà dee considerarsi come quello de' sommi geometri suoi contemporanei, principalmente italiani, co'quali conversava scrivendo la sua opera. » I latini che non » li conobbero (*gli Elementi*) non fecero per » molti secoli, che palpar tenebre, copiando ed

[52] Essai sur l' histoire des Mathématiques. *Période* 1.

» alterando alcuni pochi principj di Boezio, o di
» altri ancora men di lui intendenti della materia:
» i primi albori della Geometria vennero loro dal-
» le traduzioni, benchè imperfette, degli Elemen-
» ti di Euclide fatte da Adelardo, e da Campano
» di Novara sulle arabiche; ed i primi maestri
» della Geometria de' moderni, il Commandini,
» il Clavio, il Barrow, ed altri parecchi ancor più
» moderni, credettero bene impiegate le sue fati-
» che nel tradurre, e comentare gli Elementi di
» Euclide. In questo secolo solamente si è voluto
» trovar macchie in quel luminare della Geome-
» tria, e si è tacciata quell' opera di troppe defi-
» nizioni e divisioni scolastiche, di troppa minu-
» tezza e scrupolosità nel dimostrare le cose da se
» stesse abbastanza chiare, e di troppa sottigliez-
» za, e di qualche sofisticheria. Lascio a' veri e
» profondi geometri il decidere della giustezza di
» queste accuse; dirò soltanto, che il voto di un
» Newton, e di un Leibnitz, i più sublimi geo-
» metri, che abbia prodotti lo spirito umano, i
» quali grandemente approvano il metodo, e l'or-
» dine, l' esattezza, e 'l rigore degli Elementi di
» Euclide; l' approvazione di un Wolfio scrittore
» sì accreditato in tali materie; le nuove edizio-
» ni del Keill, del Gregory, ed anche a' nostri dì
» del più chiaro geometra dell' Inghilterra Rober-
» to Simson doveva avere maggior forza a favore
» del greco maestro, che quante accuse gli muo-

» vono contro alcuni moderni, per quanto sieno
» celebrati. E che, se il metodo di questi dà mag-
» gior facilità, ed agevola l' intelligenza de' primi
» Elementi, quello di Euclide reca maggior sicu-
» rezza alle dimostrazioni, e conduce a maggior
» profondità nello studio di quella scienza; e che
» ad ogni modo gli Elementi di Euclide sono una
» delle opere, che maggior vantaggio hanno pro-
» dotto alle scienze, e più hanno giovato allo schia-
» rimento dello spirito umano.

Chiuderò le poche autorità recate di chiarissimi uomini, con ripetere il seguente argomento, per coloro, che a' dì nostri deviano dal retto sentiero Euclideo nella istituzione geometrica elementare. Vuole ogni buona regola di sana critica, che quando credasi dover innovare su qualche cosa, che sia stata universalmente tenuta in gran pregio, per lungo tempo, e da uomini riputati abilissimi in giudicarne, debbansi dimostrare i difetti di quella, ed i vantaggi della innovazione, che vuolsi produrre; e la storia della Filosofia, e quelle delle altre scienze hanno consegrato un tal giusto principio attenendovisi esattamente. Or gli Elementi Euclidei, come si è veduto, ebbero nella scuola greca, ne' secoli ch' essa durò dopo la loro compilazione, un compiuto successo, nè alcuno de' geometri osò mai pur desiderarne altri, non che por mano a cambiamento alcuno; e tra la numerosa schiera di costoro basta nominar solamente Archimede, ed Apollonio.

La scuola araba ereditò dalla greca lo stesso rispetto per essi; e le scuole italiane, e quelle di altre nazioni europee dal XIII° secolo in poi, che sì prezioso monumento di scienza pervenne a loro notizia, e fu posto sotto a' loro occhi, niente altro desiderarono, che vederlo libero da qualche neo, che per entro o la debolezza umana, o l' ingiuria de' tempi, o l' incuria degli antichi menanti vi avesse trasfuso: ma alcuno mai osò alterarne l'ordine, il rigore, la precisione, e l'eleganza, fino a tutto il XVII° secolo, e gran parte del XVIII°. E per non manifestare che ancor due soli tra'moderni, innanzi a'quali ogni altro cede volentieri, dirò del Newton, e del Leibnitz. Essendo dunque così, coloro i quali hanno ciò osato posteriormente, intendo sempre de'più accreditati tra essi, avrebber dovuto prima esporre i motivi, che gl' inducevano ad allontanarsi da quell' originale riputato l'opera più perfetta della sapienza umana, e poi dimostrare i vantaggi, che co' loro cambiamenti arrecavano alla istituzione geometrica, in ciascun de'versi sopra indicati: e non avendo essi ciò fatto, vi dovrebbero supplire coloro, che nell'insegnamento hanno adottati i lavori di quelli. Senza di ciò è vera impudenza il por mano a nuovi Elementi, e profittando del vaneggiamento de'tempi in voler tutto innovare, cercare, sebbene invano, di sbalzar dal suo posto l'antica ottima istituzione geometrica, per sostituirvene altra frivola, disordinata, ed anche erronea; non andando le più celebrate moderne istitu-

zioni di Geometria esenti da positivi errori [53]. Son sicuro, che discendendosi a tal prova svanirà il gusto esaltato moderno in produrre nuove Geometrie.

E per terminare il presente articolo col detto di un grand' uomo, sebbene tolto dalle belle Arti, dirò che Michelangelo, nel costruire una bellissima, e nuova lanterna nella Laurenziana, richiesto da'suoi amici se dovesse variar molto da quella già famosa del Brunelleschi, rispose: *Egli si può ben variare, ma migliorare no*. Così per l' appunto è degli Elementi Euclidei: molti vi sono stati ne' tempi a noi prossimi, ed altri ancor vi saranno, che compileranno nuovi Elementi, i quali si succederanno gli uni agli altri con vita brevissima, mentre gli Euclidei, che hanno oltrepassato il lungo stadio di ventidue secoli, staranno per tutti gli altri avvenire.

Dopo ciò potrò ancor io conchiudere, come il Gregory la prefazione al suo Euclide: *Haec vindicandis Elementis quae nullo indigent vindice abunde sufficient.*



[53] Si potrà a questo proposito leggere, con assai utilità, e profitto l'opuscoletto di recente pubblicato da due giovani professori di nostra scuola, col titolo: *De' pregj degli Elementi di Euclide, e de' difetti di quelli, che se ne allontanano.*

I PRIMI SEI LIBRI

DEGLI

ELEMENTI

DI

EUCLIDE

IL PRIMO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. *Punto* è ciò, che non ha parti, ovvero, che non ha grandezza.

II. *Linea* è una lunghezza senza larghezza.

III. Gli estremi della linea sono punti.

IV. Linea *retta* è quella, che giace ugualmente fra' suoi punti.

V. *Superficie* è quella, che ha solamente lunghezza, e larghezza.

VI. Gli estremi della superficie sono linee.

VII. *Superficie piana* è quella, che giace ugualmente fra le sue linee (*v.n.*).

VIII. » *Angolo piano* è l'inclinazione scambievole di due » linee, che, giacendo in un piano, si toccano, senza star » per dritto (*v.n.*).

IX. *Angolo piano rettilineo* è l'inclinazione scambievole di due linee rette giacenti in un piano, che si toccano, senza formare una linea retta continuata (*v.n.*).

X. Allorchè una linea retta insistendo sopra altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, l'uno e l'altro di questi angoli uguali è *retto*; e la linea retta insistente si dice *perpendicolare* a quella alla quale insiste.

XI. *Angolo ottuso* è quello, ch'è maggiore del retto.

XII. *Angolo acuto* è quello, ch' è minore del retto.

XIII. *Termine* è l' estremità di qualche cosa.

XIV. *Figura* è quella, ch' è contenuta da uno, o da più termini.

XV. *Cerchio* è la figura piana contenuta da una linea, che si chiama *circonferenza*, alla quale quante linee rette pervengono, tirate da un certo punto, che sta dentro la figura, sono tutte uguali.

XVI. Un tal punto chiamasi *centro* del cerchio.

XVII. *Diametro* del cerchio è una linea retta, che passa per lo centro, ed è terminata dall' una, e l' altra parte dalla circonferenza (*v.n.*).

XVIII. *Semicerchio* è una figura compresa dal diametro, e dall' una delle due parti nelle quali questo divide la circonferenza (*v.n.*).

XIX. *Segmento* di cerchio è la figura contenuta da una linea retta, e dall' una delle due parti in cui questa divide la circonferenza (*v.n.*).

XX. Figure *rettilinee* sono quelle, che sono contenute da linee rette.

XXI. *Trilatere*, o *triangoli* diconsi le contenute da tre linee rette.

XXII. *Quadrilatere* le contenute da quattro linee rette.

XXIII. *Moltilatere* le contenute da più di quattro linee rette.

Delle figure trilatere.

XXIV. *Equilatero* è il triangolo, che ha tre lati uguali.

XXV. *Isoscele* quello, che ha solamente due lati uguali.

XXVI. *Scaleno* poi quello, che ha disuguali i tre lati.

In oltre delle figure trilatere:

XXVII. Triangolo *rettangolo* è quello, che ha un angolo retto.

XXVIII. Triangolo *ottusangolo* quello, che ha un angolo ottuso.

XXIX. Triangolo *acutangolo* quello, che ha acuti i tre angoli.

Delle figure quadrilatere.

XXX. *Quadrato* è quella, che ha i lati uguali, e gli angoli retti.

XXXI. *Rettangolo* quella figura, che ha retti gli angoli, ma non i lati uguali.

XXXII. *Rombo* quella, che ha i lati uguali, ma non gli angoli retti (*v.n.*).

XXXIII. *Romboide* quella, che ha i lati, e gli angoli opposti respettivamente uguali, ma non è nè equilatera, nè rettangola (*v.n.*).

XXXIV. Ogni altra figura quadrilatera diversa da queste si chiami *trapezio*.

XXXV. Linee rette *parallele* sono quelle, le quali essendo in uno stesso piano, prolungate indefinitamente dall'una e dall'altra parte, non si congiungono giammai.

POSTULATI, *ovvero* DIMANDE.

I. Si dimandi tirare da qualsivoglia punto, a qualsivoglia punto una linea retta.

II. Prolungare una linea retta terminata in continuo, e dirittamente.

III. Descrivere un cerchio da qualsivoglia centro, e con qualsivoglia intervallo.

IV. Che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro (*v.n.*)

» V. Che se in due linee rette cada un' altra retta linea, e
» faccia gli angoli interiori dalle stesse parti minori di due
» retti; quelle due linee rette prolungate indefinitamente
» debbano incontrarsi da quelle parti, dove gli angoli sono minori di due retti (*v.n.*).

VI. Che due linee rette non chiudono spazio. (*v. n.*).

ASSIOMI, *ovvero* NOZIONI COMUNI.

I. Le cose, che sono uguali ad una medesima cosa, sono altresì uguali fra loro.

II. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, i tutti saranno uguali.

III. E se da cose uguali si tolgono cose uguali, i residui saranno uguali.

IV. Se a cose disuguali si aggiungono cose uguali, i tutti saranno disuguali.

V. E se da cose disuguali si tolgono cose uguali, i residui saranno disuguali.

VI. Le cose, che sono doppie di una medesima cosa, sono fra loro uguali.

VII. Le cose, che sono la metà di una medesima cosa, sono uguali fra loro.

VIII. Le cose, che combaciano, sono uguali fra loro.

IX. Il tutto è maggiore della sua parte.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Sopra una data linea retta terminata costituire il triangolo equilatero (*V.N.*).

Sia la data retta linea terminata AB [*fig.1.*]; fa d' uopo costituire sopra essa il triangolo equilatero.

Dal centro A, con l' intervallo AB descrivasi il cerchio BCD (*post.3.*): similmente dal centro B, con l' intervallo BA si descriva il cerchio ACE; e dal punto C, nel quale scambievolmente segansi i cerchi, si tirino a'punti A, B le linee rette CA, CB (*post.1.*).

Perchè dunque il punto A è centro del cerchio CDB, sa-

rà la linea retta AC uguale ad AB (*def.15.*) ; e similmente, poichè il punto B è centro del cerchio CAE , sarà pure la BC uguale alla BA : ma si è dimostrato esser la CA uguale alla AB ; adunque sì la CA, come la CB è uguale alla AB. Or le cose, che sono uguali ad una medesima cosa, sono ancora uguali fra loro (*ass.1.*) ; quindi la CA è uguale alla CB : e perciò le tre linee rette CA, AB, BC sono tra loro uguali.

Quindi il triangolo ABC è equilatero, ed è costituito sopra la data linea retta terminata AB.—Ciò che bisognava fare.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

Ad un punto dato adattare una linea retta uguale ad altra linea retta data.

Sia A[*fig.2.*] il punto dato, e BC la data retta linea; bisogna adattare al punto A una linea retta uguale alla data BC.

Dal punto A al punto B si tiri la linea retta AB(*post.1.*), sopra essa costituiscasi il triangolo equilatero DAB (*pr.1.*), e producansi in direzione delle DA,DB le AE,BF (*post.2.*): poi dal centro B , con l'intervallo BC si descriva il cerchio CGH (*post.3.*) ; e similmente dal centro D, con l'intervallo DG si descriva il cerchio GKL.

Perchè dunque il punto B è centro del cerchio CGH, sarà la BC uguale alla BG (*def.15.*), e per la stessa ragione , essendo D centro del cerchio GKL, la DL è uguale alla DG: ed essendo pure la DA uguale alla DB; la rimanente AL sarà uguale alla rimanente BG (*ass.3.*). Ma si è dimostrata la BG uguale alla BC: che perciò sì la AL, che la BC è uguale alla BG.Or le cose, che sono uguali ad una medesima cosa, sono fra loro uguali (*ass.1.*) ; adunque la AL è uguale alla BC .

Quindi al punto dato A si è adattata la linea retta AL uguale alla data BC. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Date due linee rette disuguali, tagliarne dalla maggiore una uguale alla minore.

Le due rette linee date disuguali sieno AB, C [*fig.3.*], delle quali sia AB la maggiore; fa d'uopo tagliare dalla maggiore AB una linea retta uguale alla minore C.

Si adatti al punto A la linea retta AD uguale alla C (*pr.2.*), e dal centro A, con l' intervallo AD si descriva il cerchio DEF (*post. 3.*)

Or essendo A centro del cerchio DEF, sarà la AE uguale alla AD: ma anche la C è uguale alla AD; quindi sì la linea retta AE, come l' altra C è uguale alla stessa AD; perciò la AE è uguale alla C (*ass.1.*).

Adunque date due linee rette disuguali AB, C, dalla maggior AB si è tagliata la AE uguale alla minore C.— *C.B.F.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, ed uguali altresì gli angoli compresi dai lati uguali; avranno ancora la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, ed i rimanenti angoli saranno uguali a' rimanenti angoli, l' uno all' altro; quelli che sono sottesi dai lati uguali, *o sia, a' quali sono sottoposti i lati uguali* (*v.n.*)

Sieno due triangoli ABC , DEF [*fig. 1.*] , i quali abbiano due lati AB, AC uguali a' due lati DE, DF, l'uno all' altro, cioè il lato AB uguale al lato DE , e 'l lato AC a DF, e sia l'angolo BAC uguale all'angolo EDF : dico ancor la base BC essere uguale alla base EF, il triangolo ABC uguale al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli uguali a' rimanenti angoli , l' uno all' altro , a' quali sono sottoposti i lati uguali , cioè l' angolo ABC all' angolo DEF , e l' angolo ACB all' angolo DFE.

Perciocchè adattandosi il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto A sul punto D , e la linea retta AB sopra la DE , ancora il punto B si adatterà al punto E, per essere la AB uguale alla DE : ed adattandosi la AB alla DE , eziandio la linea retta AC si adatterà alla DF , essendo l' angolo BAC uguale all' angolo EDF ; onde ancora il punto C si adatterà ad F, per l'uguaglianza delle linee rette AC, DF. Ma anche il punto B si adattava ad E; laonde la base BC si adatterà alla base EF. Imperocchè , se adattandosi il punto B al punto E , e C ad F , la base BC non si adatti alla base EF; due linee rette comprenderanno spazio , che non può essere (*post.6.*) . Adunque la base BC si adatterà alla base EF , e sarà uguale ad essa (*ass. 8.*) ; e perciò tutto il triangolo ABC combacerà con tutto il triangolo DEF , e gli sarà uguale ; ed i rimanenti angoli ABC , ACB combaceranno co' rimanenti angoli DEF , DFE , e saranno uguali ad essi , cioè l' angolo ABC all' angolo DEF, e l' angolo ACB all' angolo DFE.

Che però se due triangoli , *ed il resto come nell' enunciazione.* — Ciò che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Gli angoli sopra la base de' triangoli isosceli sono uguali fra loro : e prolungandosi le linee rette uguali , saranno anche fra loro uguali gli angoli sotto la base .

Sia il triangolo isoscele ABC [*fig.5.*] , ch' abbia il lato AB uguale al lato AC; e si prolunghino BD, CE per diritto alle AB , AC (*post.2.*) : dico esser l' angolo ABC uguale all' angolo ACB , e l' angolo CBD all' angolo BCE.

Prendasi nella linea retta BD qualsivoglia punto F ; e dalla maggiore AE si tagli la AG uguale alla minore AF(*pr.3*), e giungansi le FC , GB.

Perchè dunque la AF è uguale alla AG, e la AC alla AB, le due FA, AC sono uguali alle due GA, AB, l' una all' altra, e comprendono l'angolo comune FAG; che però la base FC è uguale alla base GB , il triangolo AFC è uguale al triangolo AGB, ed i rimanenti angoli sono uguali a'rimanenti angoli l' uno all' altro , quelli che sono sottesi dai lati uguali ; cioè l' angolo ACF uguale all' angolo ABG , e l' angolo AFC all' angolo AGB (*pr. 4.*).

E perchè tutta la AF è uguale a tutta la AG , e la AB è uguale alla AC ; sarà la rimanente BF uguale alla rimanente CG (*ass. 3.*). Ma si è dimostrato esser la FC uguale alla GB ; che perciò le due BF , FC sono uguali alle due CG, GB, l' una alla altra , e l' angolo BFC è uguale all' angolo CGB , e la base di essi BC è comune ; sarà quindi il triangolo BFC uguale al triangolo CGB , ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli che sono sottesi dai lati uguali (*pr.4.*) . Laonde l' angolo FBC è uguale all' angolo GCB , e l' angolo BCF all' an-

golo CBG. Essendosi pertanto dimostrato tutto l' angolo ABG uguale a tutto l' angolo ACF, de' quali l' angolo CBG è uguale all' angolo BCF; sarà il rimanente ABC uguale al rimanente ACB, che sono sopra la base del triangolo ABC. Ma si è ancora dimostrato l' angolo FBC uguale all' angolo GCB, i quali sono sotto la base.

Adunque gli angoli sopra la base de' triangoli isosceli *ec.* *C. B. D.*

Cor. Quindi ogni triangolo equilatero è anche equiangolo (*v. n.*)

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due angoli di un triangolo sieno uguali fra loro; i lati che sottendono gli angoli uguali, saranno altresì uguali fra loro.

Sia il triangolo ABC [*fig. 6.*], che abbia l'angolo ABC uguale all' angolo ACB: dico esser pure il lato AB uguale al lato AC.

Perciocchè, se la AB non è uguale alla AC, una di esse sarà maggiore. Sia questa la AB; e dalla maggiore AB si tagli la DB uguale alla minore AC, e giungasi DC.

Ed essendo la DB uguale alla AC, e la BC comune; saranno le due DB, BC uguali alle due AC, CB, l' una all' altra, è pure l' angolo DBC uguale all' angolo ACB; onde il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB (*pr.4.*); il minore al maggiore, che è assurdo. Non è dunque la AB disuguale alla AC, ma bensì uguale.

Perciò se due angoli di un triangolo *ec.* — *C.B.D.*

Cor. Laonde ogni triangolo equiangolo è anche equilatero (*v.n.*)

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Sopra una stessa base, dalle medesime parti, non si costituiranno due triangoli distinti, che abbiano i lati uguali, l' uno all' altro (*v.n.*)

Imperocchè se può essere, sopra la stessa base AB [*f.7.*], dalle medesime parti, sieno costituiti i due triangoli distinti ACB, ADB, che abbiano uguali i lati, l' uno all' altro, cioè il lato AC al lato AD, e 'l lato BC al lato BD: non potrà mai il punto D cadere in uno de' lati AC, CB; poichè la parte sarebbe uguale al tutto: che però giungasi CD; potrà tal congiungente cadere o fuori di ciascuno de' triangoli ACB, ADB, o dentro l' un di essi.

Cada primieramente fuori [*f. 7. n. 1*]. E perchè nel triangolo ACD i lati AC, AD sono uguali, l' angolo ACD sarà uguale all' angolo ADC (*pr.5.*): ma l' angolo ACD è maggiore dell' angolo BCD; perciò anche l' angolo ADC è maggiore dell' angolo BCD, e per conseguenza l' angolo BDC è molto maggiore dell' angolo BCD. Similmente, perchè nel triangolo BCD il lato BC è uguale all' altro BD, l' angolo BDC sarà uguale all' angolo BCD; ma si è anche dimostrato esserne maggiore; e ciò è impossibile.

Che se la CD [*f.7.n. 2*] si supponga cader dentro l' uno dei triangoli ACB; si producano le linee rette AC, AD per diritto in E, F.

Perchè dunque nel triangolo CAD i lati uguali AC, AD, sono prolungati in E, F, sotto la base, sarà l'angolo FDC uguale all' angolo ECD (*pr. 5.*): ma per essere BC uguale a BD, l' angolo BCD è uguale all' angolo BDC: ed è l' angolo BDC maggiore dell' angolo FDC: quindi ancor l' ango-

lo BCD dovrà esser maggiore dell' angolo ECD ; e perciò la parte sarebbe maggiore del tutto, ch'è impossibile (*ass*.*9*).

Adunque sopra una stessa base, *ec*. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, ed abbiano la base uguale alla base; avranno uguali gli angoli contenuti dai lati uguali.

I due triangoli ABC, DEF [*fig*. *8*.] abbiano due lati AB, AC uguali a due lnti DE, DF, l' nno all' altro, cioè AB uguale a DE, ed AC a DF ; ed abbiano pure la base BC uguale alla base EF : dico ancora l' angolo BAC essere uguale all' angolo EDF.

Perciocchè adattandosi il triangolo ABC al triangolo DEF, ed il punto B sopra E, e la linea retta BC sopra la EF ; dovrà cadere il punto C nell' altro F, per essere la BC uguale alla EF : che però combaciando BC con EF, combaceranno anche le BA, AC con le ED, DF ; poichè se la base BC combaccrà con la base EF, ed i lati BA, AC non combacino co' lati ED, DF, ma cadano separatamente, come EG, GF, si saranno costituiti sopra la stessa base, dalle medesime parti, due triangoli distinti, con i lati uguali, l' uno all' altro : ma non si possono costituire (*pr*. *7*.). Adunque combaciando la base BC con la base EF, non possono i lati BA, AC non combaciare co' lati ED, DF : che però vi combaceranno ; e quindi l' angolo BAC combacerà con l' angolo EDF, e gli sarà uguale (*ass*.*8*.).

Se dunque due triangoli abbiano *ec*. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Dividere per metà un dato angolo rettilineo.

Sia BAC l' angolo rettilineo dato [*fig.9.*] ; fa d' uopo dividerlo per metà.

Prendasi nella retta linea AB qualsivoglia punto D, e dalla linea retta AC si tagli la AE uguale alla AD (*pr.3.*), e congiunta DE , costituiscasi sopra essa il triangolo equilatero DEF (*pr. 1.*) , e giungasi la AF : dico l' angolo BAC esser diviso per metà dalla linea retta AF.

Imperocchè essendo la AD uguale alla AE , e la AF comune ; saranno le due DA , AF uguali alle due EA , AF , l' una all' altra : è pure la base DF uguale alla base EF ; quindi l'angolo DAF è uguale all' angolo EAF (*pr. 8.*)

E perciò l' angolo rettilineo dato BAC è diviso per metà dalla linea retta AF. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Dividere per metà una data linea retta terminata.

Sia la data retta linea terminata AB [*fig. 10.*] ; bisogna dividerla per metà.

Costituiscasi sopra essa il triangolo equilatero ACB ; e si divida l' angolo ACB per metà con la linea retta CD (*pr.9.*) : dico la linea retta AB esser divisa per metà nel punto D .

Perciocchè essendo la AC uguale alla CB , e la CD comune ; le due AC , CD sono uguali alle due BC, CD, l' una all' altra , e l' angolo ACD è uguale all' angolo BCD ; adunque la base AD è uguale alla base BD (*pr.4.*) .

Quindi la data linea retta terminata AB è divisa per metà nel punto D. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Ad una data linea retta, da un punto dato in essa, tirare la linea retta perpendicolare.

Sia data la linea retta AB [*fig.11.*], ed in essa il punto C; fa d'uopo tirare dal punto C la linea retta perpendicolare alla AB.

Si prenda nella AC qualsivoglia punto D, si ponga la CE uguale alla CD (*pr.3.*); sopra la DE costituiscasi il triangolo equilatero FDE (*pr.1.*), e giungasi FC: dico essersi alla data linea retta AB, dal punto C dato in essa, tirata la perpendicolare FC.

Poichè la CD è uguale alla CE, ed è comune la CF; le due CD, CF sono uguali alle due CE, CF, l'una all'altra, e la base DF è uguale alla base EF; adunque l'angolo DCF è uguale all'angolo ECF (*pr.8.*), e sono adjacenti. Or quando una linea retta insistendo sopra altra linea retta fa uguali gli angoli adjacenti, ciascuno degli angoli uguali è retto (*def.10.*); adunque è retto ciascuno degli angoli DCF, FCE.

E però alla data linea retta AB, dal punto C dato in essa, si è tirata la linea retta perpendicolare FC. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Sopra una data linea retta interminata, da un punto dato, che non sia in essa, tirare la linea retta perpendicolare.

Sia data la linea retta interminata AB [*fig. 12.*], e dato il punto C, che non sia in essa; fa d' uopo tirare dal dato punto C la linea retta perpendicolare sopra la data linea retta interminata AB.

Si prenda dall' altra parte della linea retta AB qualsivoglia pnnto D, e dal centro C, con l' intervallo CD, si descriva il cerchio EFG, che incontri la AB in E,G; indi si divida la EG per metà in H (*pr.10.*), e tirinsi le CE, CH, CG: dico che sulla data linea retta interminata AB, dal punto C, che non è in essa, si è tirata la perpendicolare CH.

Imperocchè essendo la GH uguale alla HE, e la CH comnne, le due GH, HC sono nguali alle due EH, HC, l' una all' altra; è pure la base CG uguale alla base CE; adunque l'angolo CHG è uguale all' angolo EHC (*pr.8.*), e sono adjacenti. Ma quando una linea retta insistendo sopra altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, ciascuno degli angoli uguali è retto, e la linea retta insistente, si dice perpendicolare a quella cui insiste (*def.10.*).

Quindi sopra la data linea retta interminata AB, dal dato punto C, che non è in essa, si è tirata la perpendicolare CH. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Quando una linea retta stando sopra un'altra retta linea faccia angoli; o gli farà retti amendue, o insieme uguali a due retti.

La linea retta AB [*fig. 13.*] stando sopra la linea retta CD faccia gli angoli CBA, ABD: dico gli angoli CBA, ABD, o esser due retti, o uguali a due retti.

Imperocchè se l' angolo CBA è uguale all' angolo ABD, sono due retti: ma se nò, dal punto B si tiri la BE perpendicolare alla CD (*pr.11.*); saranno perciò retti gli angoli CBE, EBD. E perchè l'angolo CBE è uguale ai due angoli CBA, ABE; aggiungasi comune l' angolo EBD; e gli angoli CBE, EBD saranno uguali ai tre angoli CBA, ABE, EBD (*ass. 2.*). Di nuovo, perchè l'angolo DBA è uguale ai due DBE, EBA, si aggiunga comune ABC; e gli angoli DBA, ABC, saranno uguali ai tre DBE, EBA, ABC. Ma si sono dimostrati gli angoli CBE, EBD uguali agli stessi tre; e le cose uguali ad una medesima cosa, sono uguali tra loro (*ass. 1.*). Adunque gli angoli CBE, EBD sono uguali agli angoli DBA, ABC: e gli angoli CBE, EBD sono due retti; perciò ancor gli angoli DBA, ABC sono uguali a due retti.

E però quando una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

Cor. Dalla precedente dimostrazione può rilevarsi, che *due linee rette non possano avere un comune segmento* (*V.N.*)

Poichè se le rette CBD, CBE [*fig.14*] avessero il comune segmento CB, tirata dal punto B la BA comunque, sarebbero uguali a due retti sì gli angoli ABC, ABD, che gli altri ABC, ABE; onde tolto il comune ABC, resterebbe l'angolo maggiore ABD uguale al minore ABE; ch'è impossibile (*ass.9*).

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se ad una linea retta, e ad un punto in essa, due altre linee rette, non poste dalle medesime parti, facciano gli angoli adjacenti uguali a due retti; queste linee rette saranno per diritto fra loro.

Ad una linea retta AB [*fig.14.*], ed al punto B in essa, due altre linee rette BC, BD, non poste dalle medesime parti, facciano gli angoli adjacenti ABC, ABD uguali a due retti: dico la linea retta BD esser per diritto alla CB.

Imperocchè, se la BD non è per diritto alla CB, sia la BE per diritto alla CB. E perchè la linea retta AB sta sopra la retta CBE, sono gli angoli ABC, ABE uguali a due retti (*pr.13.*); ma ancora gli angoli ABC, ABD sono uguali a due retti, onde gli angoli CBA, ABE sono uguali agli angoli CBA, ABD: tolgasi il comune ABC; ed il rimanente ABE è uguale al rimanente ABD (*ass.5.*); il minore al maggiore, che non può essere. Adunque la BE non è per diritto alla CB. Dimostreremo similmente, non esserlo alcun' altra, fuori che la BD. Quindi la CB è per diritto alla BD.

E però, se una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se due linee rette scambievolmente seghinsi, faranno gli angoli, che sono al vertice uguali fra loro.

Due linee rette AB, CD [*fig.15.*] scambievolmente seghinsi nel punto E: dico l' angolo AEC essere uguale all' angolo DEB, e l' angolo CEB all' altro AED.

Poichè la linea retta AE stando sopra la retta CD, fa gli angoli CEA, AED; saranno questi uguali a due retti(*pr.13.*) Similmente, perchè la linea retta DE stando sopra la retta AB fa gli angoli AED, DEB; saranno AED, DEB uguali a due retti. Ma si sono dimostrati gli angoli CEA, AED uguali a due retti; adunque gli angoli CEA, AED sono uguali agli angoli AED, DEB: tolgasi il comune AED, ed il rimanente angolo CEA è uguale al rimanente BED. Nel modo stesso si dimostreranno uguali gli angoli CEB, AED.

Laonde se due linee rette *ec.* — *C. B. D.*

Cor. 1. Si rileva da ciò, che segandosi scambievolmente due linee rette, fanno gli angoli, che sono nel segamento, uguali a quattro retti (*r. n.*).

Cor. 2. E conseguentemente, che tutte le linee rette concorrenti ad un punto, vi fanno gli angoli uguali a quattro retti (*r. n.*).

**

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Di ogni triangolo prolungandosi un lato, l' angolo esteriore è maggiore dell' uno, o dell' altro interiore, ed opposto.

Sia il triangolo ABC [*fig.16.*], di cui il lato BC si prolunghi in D. dico l' angolo esteriore ACD esser maggiore dell'uno, o dell'altro interiore, ed opposto, cioè CBA, BAC.

Si divida la AC per metà nel punto E (*pr. 10.*), e congiunta BE, si prolunghi nel punto F, e pongasi la EF uguale alla BE, poi si tiri FC, e prolunghisi la AC verso G.

Perchè dunque la AE è uguale alla EC, e la BE alla EF, le due AE, EB sono uguali alle due CE, EF, l'una all' altra, e l' angolo AEB è uguale all' angolo FEC, perchè sono al vertice (*pr.15.*) ; laonde la base AB è uguale alla base CF, ed il triangolo AEB al triangolo CEF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l' uno all' altro, quelli che sono sottesi dai lati uguali (*pr. 4.*). Adunque l' angolo BAE è uguale all' angolo ECF. Ma è poi l'angolo ECD maggiore dell' angolo ECF ; quindi l' angolo ACD è maggiore dell' angolo BAE. Nel modo stesso, se la BC si divida per metà, si dimostrerà l'angolo BCG, cioè l'altro ACD (*pr.15.*) maggiore dell' angolo ABC.

Laonde di ogni triangolo *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Due angoli di ciascun triangolo, presi in qualsivoglia modo, sono minori di due retti.

Sia il triangolo ABC [*fig.17.*]: dico due angoli del triangolo ABC, presi in qualsivoglia modo, esser minori di due retti.

Si prolunghi la BC in D. E perchè del triangolo ABC l'angolo esteriore ACD è maggiore dell' interiore, ed opposto ABC (*pr.15.*), aggiungasi comune l' angolo ACB, e saranno gli angoli ACB, ACD maggiori degli angoli ABC, BCA. Ma gli angoli ACD, ACB sono uguali a due retti (*pr.13.*); perciò gli angoli ABC, BCA sono minori di due retti. Similmente dimostreremo, che ancor gli angoli BAC, ABC sieno minori di due retti, e lo stesso per gli altri CAB, BCA.

Quindi di ogni triangolo due angoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Il maggior lato di ciascun triangolo sottende l'angolo maggiore.

Sia il triaogolo ABC [*fig. 18.*], che abbia il lato AC maggiore del lato AB: dico ancor l'angolo ABC esser maggiore dell' angolo ACB.

Perchè il lato AC è maggiore del lato AB, pongasi la AD uguale alla AB, e si giunga BD. Ed essendo l' angolo esteriore ADB del triangolo BDC maggiore dell' interiore, ed opposto DCB (*pr.25.*); ed ADB uguale ad ABD, perchè il lato AB è uguale al lato AD (*pr. 5.*). Adunque l' an-



golo ABD è maggiore dell' angolo ACB ; e quindi ABC sarà molto maggiore di ACB .

E però il maggior lato di ciascun triangolo *ec.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Il maggior angolo di ciascun triangolo è sotteso dal lato maggiore (*V.N.*) .

Sia il triangolo ABC [*fig. 19.*] , che abbia l' angolo ABC maggiore dell' angolo ACB: dico il lato AC esser maggiore del lato AB.

Imperocchè , se non è maggiore , o AC è uguale ad AB , ovvero n' è minore : Ma non è uguale ; poichè ancor l'angolo ABC sarebbe uguale all' altro ACB (*pr.5.*) , che non è : e nè anche è minore , perchè sarebbe l' angolo ABC minore dell' angolo ACB (*pr.18.*) , che non è ; onde AC non è minore di AB . E si è dimostrato , che non è uguale. Adunque AC è maggiore di AB.

Laonde il maggior angolo di ciascun triangolo *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Due lati di ciascun triangolo , presi in qualsivoglia modo , sono maggiori del rimanente.

Sia il triagolo ABC [*fig. 20.*] : dico due lati del triangolo ABC, presi in qualsivoglia modo, esser maggiori del rimanente : cioè i lati BA , AC maggiori del lato BC , i lati

AB, BC maggiori del lato AC, ed i lati BC. CA maggiori di AB.

Prolunghisi BA nel punto D, si ponga AD uguale a CA, e giungasi DC.

Perchè dunque DA è uguale ad AC, sarà l'angolo ADC uguale all'angolo ACD (*pr.5.*): ma l'angolo BCD è maggiore dell'angolo ACD; adunque l'angolo BCD è anche maggiore dell' angolo ADC. Or nel triangolo DCB è l' angolo DCB maggiore dell'angolo BDC; ed il maggior angolo è sotteso dal maggior lato (*pr.19.*); perciò DB è maggiore di BC: ma DB è uguale alle BA, AC; onde i lati BA, AC sono maggiori di BC. Similmente dimostreremo essere i lati AB, BC maggiori del lato CA; ed i lati BC, CA maggiori di AB.

Adunqne due lati di ciascun triangolo ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se da' termini d' un lato del triangolo costituiscansi due linee rette di dentro; queste saranno minori de' due altri lati del triangolo, ma comprenderanno l' angolo maggiore.

Da' termini B, C [*fig. 21.*] del lato BC del triangolo ABC costituiscansi di dentro due linee rette BD, DC: dico esser BD, DC minori degli altri due lati BA, AC del triangolo; ma comprendere l'angolo BDC maggiore dell' angolo BAC.

Si prolunghi BD nel punto E: e perchè due lati di ciascun triangolo sono maggiori del rimanente (*pr. 20.*); saranno i due lati AB, AE del triangolo ABE maggiori del

lato BE ; si aggiunga comune EC , e saranno BA , AC maggiori di BE , EC . Similmente , poichè i due lati CE , ED del triangolo CED sono maggiori del lato CD ; aggiungasi comune DB , e saranno CE , EB maggiori di CD , DB : ma BA,AC si sono dimostrati maggiori di BE,EC ; quindi BA, AC sono molto maggiori di BD , DC.

Inoltre , essendo l' angolo esteriore di ciascun triangolo maggiore dell' interiore , ed opposto (*pr.16.*) ; sarà l' angolo esteriore BDC del triangolo CDE maggiore di CED . Per la stessa ragione ancor l' angolo esteriore CEB del triangolo ABE è maggiore di BAC ; e si è dimostrato l' angolo BDC maggiore dell' angolo CEB . Adunque l' angolo BDC sarà molto maggiore dell' angolo BAC.

Quindi se dai termini di un lato del triangolo *ec.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

Da tre linee rette , che sono uguali a tre rette linee date, costituire un triangolo : ma bisogna, che due , prese in qualsivoglia modo , sieno maggiori della rimanente (*r.n.*).

Sieno A , B , C [*fig .22.*] tre linee rette date , due delle quali , prese in qualsivoglia modo , sieno maggiori della rimanente , cioè , che le A , B sieno maggiori della C , le A , C maggiori della B , ed ancora le B , C sieno maggiori della A : fa d' uopo costituire il triangolo da tre linee rette uguali alle A , B , C .

Espongasi la linea retta DE, terminata nel punto D, interminata verso E , e pongasi la DF uguale alla A (*pr.3.*) , la FG uguale alla B , e la GH uguale alla C ; poi dal centro F con l' intervallo FD si descriva il cerchio DKL (*post.3.*) ;

e di nuovo dal centro G con l' intervallo GH si descriva l'altro cerchio HKL, e tirinsi le KF, KG: dico il triangolo KFG esser costituito da tre linee rette uguali alle A, B, C.

Perciocchè essendo il punto F centro del cerchio DKL, sarà la FD uguale alla FK; ma la FD è uguale alla A; adunque ancor la KF è uguale alla A. Di nuovo, essendo il punto G centro del cerchio KHL, sarà la GH uguale alla GK; ma la GH è uguale alla C; adunque la GK è pure uguale alla C: e la B si è posta uguale alla FG; quindi le tre linee rette FK, FG, GK sono uguali alle tre A, B, C.

E perciò dalle tre linee rette KF, FG, GK, che sono uguali alle tre altre date A, B, C si è costituito il triangolo KFG. *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

Ad una data linea retta, e nel punto dato in essa, costituire un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Sia la data linea retta AB [*fig. 23.*], ed in essa il punto A, e sia dato l' angolo rettilineo DCE; fa d' uopo alla data linea retta AB, e nel punto A in essa, costituire un angolo rettilineo uguale al dato DCE.

Prendansi nell'una, e l' altra di esse CD, CE qualsivogliano punti D, E, e giungasi DE, e da tre linee rette, che sieno uguali alle tre CD, DE, EC, si costituisca il triangolo AFG (*pr. 22.*), di modo, che la CD sia uguale alla AF, la CE alla AG, e la DE alla FG.

Perchè dunque le due DC, CE sono uguali alle due FA, AG, l'una all' altra, e la base DE è uguale alla base FG; sarà ancora l' angolo DCE uguale all'angolo FAG (*pr. 8.*).

Quindi alla data linea retta AB, nel punto A dato in essa, si è costituito l' angolo rettilineo FAG uguale al dato angolo rettilineo DCE. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e l' angolo contenuto dai lati di uno maggiore dell' angolo contenuto dagli uguali lati dell' altro; sarà la base di quello maggiore della base di questo (*v.n.*).

Sieno due triangoli ABC, DEF [*fig. 24.*], che abbiano due lati AB, AC uguali a due lati DE, DF, l' un l' altro, cioè il lato AB uguale al lato DE, ed il lato AC uguale a DF, ma l' angolo BAC sia maggiore dell' angolo EDF: dico ancor la base BC esser maggiore della base EF.

Poichè l' angolo BAC è maggiore dell' angolo EDF, si costituisca alla linea retta DE, nel punto D in essa, l' angolo EDG uguale all' angolo BAC (*pr.23.*), pongasi la DG uguale alla AC, o alla DF, e giungansi FG, EG. E perchè la AB è uguale alla DE, e la AC alla DG, le due BA, AC sono uguali alle due ED, DG, l' una all' altra, e l' angolo BAC è uguale all'angolo EDG; adunque la base BC è uguale alla base EG (*pr. 4.*). Inoltre, poichè la DG è uguale alla DF, l' angolo DFG è uguale all' angolo DGF (*pr.5.*); e però l' angolo DFG è maggiore dell' angolo EGF; adunque l' angolo EFG sarà molto maggiore dell' angolo EGF. E poichè EFG è triangolo, che ha l' angolo EFG maggiore dell'angolo EGF, ed il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore (*pr.19.*); sarà il lato EG maggiore del lato EF:

ma il lato EG è uguale al lato BC ; adunque ancora BC sarà maggiore di EF .

Quindi se due triangoli abbiano due lati *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l' un l' altro , e la base maggiore delle base ; avranno ancora l'angolo maggiore dell' angolo , ch'è contenuto da' lati uguali .

Sieno due triangoli ABC, DEF [*fig.25.*] , che abbiano due lati AB, AC uguali a' due lati DE, DF, l' uno all' altro, cioè il lato AB uguale al lato DE , ed il lato AC al lato DF, e la base BC sia maggiore della base EF : dico ancora l' angolo BAC esser maggiore dell' angolo EDF.

Perciocchè, se non è maggiore , o è uguale, ovvero minore. Ma non è l' angolo BAC uguale all' angolo EDF ; perchè sarebbe pure la base BC uguale alla base EF (*pr.4.*), che non è : adunque l' angolo BAC non è uguale all' angolo EDF. Nè tampoco è minore ; poichè sarebbe la base BC minore della base EF (*pr.24.*) , che non è . Quindi l' angolo BAC non è minore dell' angolo EDF ; e si è pur dimostrato , che non è uguale ; perciò l' angolo BAC è maggiore dell' angolo EDF .

E però , se due triangoli *ec.*— *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, o quello adjacente agli angoli uguali, o l' altro, che sottende un degli angoli uguali; avranno ancora i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati, l' uno all' altro, ed il terzo angolo uguale al terzo angolo.

Sieno due triangoli ABC, DEF [*fig. 26.*], che abbiano due angoli ABC, BCA uguali ai due DEF, EFD, l' uno all' altro, cioè l' angolo ABC uguale all' angolo DEF, e l' angolo BCA all' angolo EFD, ed abbiano un lato uguale ad un lato, e primieramente quello adjacente agli angoli uguali, cioè il lato BC al lato EF: dico, che avranno eziandio i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, l' un l' altro, cioè il lato AB al lato DE, ed il lato AC a DF, ed il rimanente angolo BAC uguale al rimanente angolo EDF.

Imperocchè, se la linea retta AB non è uguale alla DE, una di esse sarà maggiore. Sia maggiore AB, e pongasi la GB uguale alla DE, e giungasi GC.

Perchè dunque la BG è uguale alla ED, e la BC alla EF, le due GB, BC sono uguali alle due DE, EF, l' una all' altra, e l' angolo GBC è uguale all' angolo DEF; adunque la base GC è uguale alla base DF, il triangolo GBC al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli sono uguali a' rimanenti angoli, l' uno all' altro, quelli che sono sottesi da' lati uguali (*pr. 4.*). È dunque l' angolo GCB uguale all' angolo DFE: ma l angolo DFE si è posto uguale all' angolo ACB; quindi ancor l' angolo BCG è uguale all' angolo BCA, il minore al maggiore, che non può essere. Laonde non è la

AB disuguale alla DE ; e perciò sarà uguale : la BC poi è uguale alla EF; laonde le due AB , BC sono uguali alle due DE , EF , l' una all' altra , ed è anche l' angolo ABC uguale all' angolo DEF ; adunque la base AC è uguale alla base DF , ed il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente EDF (*pr. 4.*).

Sieno ora uguali i lati, che sottendono gli angoli uguali , come AB a DE : dico similmente,che i rimanenti lati saranno uguali a' rimanenti lati , cioè AC a DF, e BC ad EF, e che eziandio il rimanente angolo BAC sarà uguale al rimanente EDF.

Imperocchè , se la BC non è uguale alla EF , l' una di esse è maggiore . S' è possibile , sia maggiore la BC ;,si ponga la BH uguale alla EF , e giungasi AH . Ed essendo la BH uguale alla EF , e la AB alla DE , le due AB , BH sono uguali alle due DE , EF , l' una all' altra , e comprendono angoli uguali ; adunque la base AH è uguale alla base DF, il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF , ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, a'quali stan sottoposti i lati uguali (*pr.4.*).Quindi l' angolo BHA è uguale all' altro EFD : ma l' angolo EFD è uguale all' angolo BCA ; adunque ancor l' angolo BHA è uguale all' angolo BCA : onde l' angolo esteriore BHA del triangolo ACH è uguale all' interiore , ed opposto BCA , che non può essere (*pr.16.*) . Non è dunque la BC disuguale alla EF , ma uguale : è poi la AB uguale alla DE; perciò le due AB, BC sono uguali alle due DE , EF , l' una all' altra, e comprendono angoli uguali ; adunque la base AC è uguale alla base DF, il triangolo ABC al triangolo DEF , ed il rimanente angolo BAC al rimanente angolo EDF (*pr. 4.*) .

Laonde se due triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due linee rette, fa gli angoli alterni fra loro uguali; le linee rette saranno parallele.

La linea retta EF [*fig.* 27.] cadendo sopra le dne linee rette AB , CD , faccia gli angoli alterni AEF , EFD nguali fra loro : dico la linea retta AB esser parallela alla CD.

Imperocchè , se non è parallela , le AB , CD prolungate converranno, o verso le parti B, D, o verso le A, C(*def.35*): Si prolnnghino , e convengano dalle parti B , D , nel punto G ; dunque l'angolo esteriore AEF del triangolo GEF è maggiore dell'interiore, ed opposto EFG (*pr.16*) : ma gli è ancora nguale , lo che non può essere ; quindi le AB , CD prolungate dalle parti B , D non converranno. Similmente si dimostrerà, che non convengano dalle parti A, C : e quelle linee rette , che non convengono in alcnna delle parti , sono parallele fra loro (*def.33.*); onde la AB è parallela alla CD.

E perciò , se cadendo una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due linee rette fa l' angolo esteriore uguale all' interiore, ed opposto , e dalle medesime parti ; ovvero gl' interiori dalle medesime parti uguali a due retti : le linee rette saranno parallele fra loro .

Nelle due linee rette AB , DC [*fig.* 28.] cadendo la li-

nea retta EF, faccia l' angolo esteriore EGB uguale all' interiore, ed opposto GHD; o gli angoli interiori, e dalle medesime parti BGH, GHD uguali a due retti: dico esser la linea retta AB parallela alla CD.

Perciocchè essendo l'angolo EGB uguale all'angolo GHD, e l' istesso angolo EGB uguale all' angolo AGH (*pr. 15.*), sarà l' angolo AGH uguale all' angolo GHD, e sono alterni; adunque la AB è parallela alla CD (*pr. 27.*).

Inoltre, poichè gli angoli BGH, GHD sono uguali a due retti, e sono ancora gli angoli AGH, BGH uguali a due retti (*pr. 13.*); saranno gli angoli AGH, BGH uguali agli angoli BGH, GHD; si tolga il comune BGH, sarà il rimanente AGH uguale al rimanente GHD; e sono alterni. Adunque la AB sarà parallela alla CD (*pr. 27.*).

È perciò se cadendo una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Cadendo una linea retta sopra le linee rette parallele; farà gli angoli alterni uguali fra loro, e l'esteriore uguale all' interiore, ed opposto, dalle medesime parti, e gl'interiori, e dalle medesime parti, uguali a due retti.

Cada la linea retta EF [*fig. 29.*] sopra le linee rette parallele AB, CD: dico che farà gli angoli alterni AGH,GHD uguali fra loro; l' esteriore EGB uguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti GHD; e gl' interiori, e dalle medesime parti BGH, GHD uguali a due retti.

Imperocchè, se AGH non è uguale a GHD, un di essi sarà maggiore. Sia AGH maggiore: ed essendo l' angolo AGH

maggiore dell' altro GHD, si aggiunga comune BGH; e gli angoli AGH, BGH saranno maggiori degli altri BGH, GHD (*ass.4.*): ma gli angoli AGH, BGH sono uguali a due retti (*pr. 13.*); adunque gli angoli BGH, GHD sono minori di due retti. Or quelle linee rette, che intersegate da un'altra fanno con questa gli angoli interiori, dalle stesse parti, minori di due retti, prolungate indefinitamente debbono incontrarsi (*post.5.*); perciò le linee rette AB, CD indefinitamente prolungate concorreranno fra loro: ma non concorrono, ponendosi parallele (*def. 35.*); non è dunque l' angolo AGH disuguale all'angolo GHD, ond'è necessario, che gli sia uguale.

È poi l' angolo AGH uguale all' angolo EGB (*pr.15.*); adunque anche EGB sarà uguale a GHD.

Si aggiunga comune l' angolo BGH; e saranno gli angoli EGB, BGH uguali agli angoli BGH, GHD: ma gli angoli EGB, BGH sono uguali a due retti (*pr.13.*); adunque anche gli angoli BGH, GHD saranno uguali a due retti.

Per la qual cosa, se una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

Quelle linee rette, che sono parallele ad una stessa linea retta, sono anche parallele fra loro.

Sieno ambedue le AB, CD [*fig.30.*] parallele alla stessa EF: dico ancora la AB esser parallela alla CD.

Cada sopra esse la linea retta GK.

E perchè sopra le linee rette parallele AB, EF cade la linea retta GK, l' angolo AGH è uguale all' angolo GHF (*pr. 29.*). Similmente nelle linee rette parallele EF, CD cadendo la linea retta GK, l' angolo esteriore GHF è ugua-

le all' interiore , ed opposto , dalle medesime parti , HKD (*pr.29.*) : ma si è dimostrato l' angolo AGK uguale all'angolo GHF ; quindi sarà pure l' angolo AGK uguale all' angolo GKD , e sono alterni ; adunque AB è parallela a CD.

E perciò quelle linee rette *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA.

Per un dato punto tirare la linea retta parallela ad una data retta linea.

Sia A [*fig. 31.*] il punto dato , e BC la linea retta data ; fa d' uopo per lo punto A tirare la linea retta parallela alla BC .

Si prenda nella BC qualsivoglia punto D, e giungasi AD; poi alla linea retta AD , nel punto A in essa , si costituisca l' angolo DAE uguale all' angolo ADC (*pr.23.*) , e si prolunghi la EA per diritto in F .

Perchè dunque cadendo la linea retta AD sopra le due linee rette BC , EF , fa gli angoli alterni EAD , ADC fra loro uguali , sarà la AF parallela alla BC (*pr.27.*).

Quindi per lo dato punto A si è tirata la linea retta EF parallela alla linea retta data BC. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Di ogni triangolo, prolungandosi un lato , l' angolo esteriore è uguale a' due interiori, ed opposti; ed i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti .

Sia il triangolo ABC [*fig. 32.*] , ed un lato di esso BC protraggasi in D: dico l' angolo esteriore ACD essere uguale a' due interiori, ed opposti CAB , ABC : ed i tre angoli interiori ABC,BCA,CAB del triangolo essere uguali a due retti.

Si tiri per lo punto C la CE parallela alla linea retta AB (*pr.31.*). Ed essendo la AB parallela alla CE, ed in esse cadendo la AC, gli angoli alterni BAC , ACE sono uguali fra loro (*pr.29.*). Similmente perchè la AB è parallela alla CE , e cade in esse la linea retta BD , l' angolo esteriore ECD è uguale all' interiore, ed opposto ABC (*pr.29.*) : e si è dimostrato l' angolo ACE uguale all'angolo BAC ; perciò tutto l' angolo esteriore ACD è uguale a' due interiori , ed opposti CAB , ABC . Aggiungasi comune l' angolo BCA , e saranno gli angoli ACD , ACB uguali ai tre ABC , BCA , CAB : ma gli angoli ACD , ACB sono uguali a due retti (*pr.13.*) ; adunque anche ABC, BCA, CAB saranno uguali a due retti .

Quindi di ogni triangolo *ec.* — *C. B. D.*

Cor. 1. *Tutti gli angoli interiori di ogni figura rettilinea, insieme con quattro angoli retti, sono uguali a tanti angoli retti , quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura* (*v.n.*).

Imperocchè la figura rettilinea ABCDE [*fig.32, a.*] si divide in tanti triangoli , quanti lati essa ha , tirando linee rette dal punto F dentro la figura a' vertici de' suoi angoli ; che perciò essendo gli angoli di ciascuno di questi triangoli uguali a due retti ; gli angoli di tutt' i triangoli saranno uguali a tanti angoli retti , quanti ne vengono dinotati dal doppio numero de' triangoli , o sia dal doppio numero da' lati della figura . Ma gli angoli di tutti que' triangoli sono uguali a quelli della figura insieme con gli angoli nel punto F , vertice comune de' triangoli , i quali sono presi insieme uguali a quattro retti (*c.2.pr.15.*). Adunque gli angoli della figura insieme con quattro retti sono uguali a tanti retti , quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura .

Cor. 2. Inoltre : *Tutti gli angoli esteriori di ogni figura rettilinea sono insieme uguali a quattro retti.*

Imperocchè ciascun angolo interiore ABC (*fig.32.b.*) della figura insieme coll' adjacente esteriore ABD è nguale a due retti (*pr. 13.*) ; che perciò tutti gli angoli interiori della figura insieme con tutti gli esteriori , saranno uguali a tanti due angoli retti , quanti sono gli angoli , o i lati della figura. Ma si è dimostrato, che al poc' anzi detto numero di angoli retti sieno pure nguali gli angoli interiori della figura insieme con quattro retti (*cor.pr.*) . Adunque gli angoli interiori della figura insieme con gli esteriori saranno uguali agli angoli interiori della medesima insieme con quattro retti ; che perciò, tolti di comune gli angoli della figura , resteranno gli esteriori uguali a quattro retti.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

Quelle linee rette, che congiungono le uguali, e parallele, dalle medesime parti, sono ancor esse uguali , e parallele .

Sieno uguali , e parallele le AB , CD [*fig.33.*], e le congiungano , dalle parti medesime , le linee rette AC , BD : dico le AC , BD essere uguali , e parallele .

Giungasi BC. E perchè la AB è parallela alla CD , ed in esse cade la BC ; gli angoli alterni ABC , BCD sono nguali (*pr.29.*). Adunque essendo la AB uguale alla CD , e la BC comune , le due AB , BC sono uguali alle due DC , CB , ed è l' angolo ABC uguale all' angolo BCD ; quindi la base AC è uguale alla base BD , il triangolo ABC al triangolo BCD , ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all' altro , quelli che sono sottesi da' lati uguali (*pr.4.*) : onde

l'angolo ACB è uguale all'angolo CBD. E poichè nelle due linee rette AC, BD cadendo la linea retta BC, fa uguali fra loro gli angoli alterni ACB, CBD; la AC è parallela alla BD (*pr. 27.*); e le si è dimostrata uguale.

Adunque le linee rette *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

I lati, e gli angoli opposti de' parallelogrammi, sono uguali fra loro; ed il diametro gli divide per metà.

N. B. La voce *parallelogrammo* è stata adottata da Euclide per dinotare la figura quadrilatera, che ha gli opposti lati paralleli.

Sia il parallelogrammo ABDC [*fig. 34.*], il cui diametro sia CB: dico i lati opposti del parallelogrammo ABDC, e gli angoli essere uguali fra loro; ed il diametro CB dividerlo per metà.

Perciocchè essendo la AB parallela alla CD, e cadendo in esse la linea retta CB, gli angoli alterni ABC, BCD sono fra loro uguali (*pr.29*). Similmente perchè la AC è parallela alla BD, e cade in esse la CB, gli angoli alterni ACB, CBD sono fra loro uguali. Quindi sono ABC, BCD due triangoli, i quali hanno due angoli ABC, ACB uguali a due angoli BCD, CBD, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, ch'è adjacente agli angoli uguali, comune ad ambedue CB; adunque avranno i rimanenti lati uguali a'rimanenti lati, l'uno all'altro ed il rimanente angolo uguale al rimanente angolo (*pr.26*); perciò il lato AB è uguale al lato CD, il lato AC al lato BD, e l'angolo BAC all'angolo BDC. Or essendo l'angolo ABC ugnale all'angolo BCD, e l'angolo CBD all'angolo BCD; sarà tutto l'angolo ABD uguale a tutto ACD; e si è dimostrato

l'angolo BAC uguale all'angolo BDC. Adunque i lati, e gli angoli opposti de' parallelogrammi sono uguali fra loro.

Dico ancora il diametro dividerli per metà.

Poichè essendo la AB uguale alla CD, e la BC comune, le due AB, BC sono uguali alle due DC, CB, l'una all'altra, e l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD (*pr. 29.*); adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD (*pr. 4.*). E perciò il diametro BC divide per metà il parallelogrammo ACDB. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti nella medesima base, e fra le medesime parallele, sono uguali fra loro (*V.N.*)

Sieno i parallelogrammi ABCD, EBCF [*fig.35.*] costituiti nella medesima base BC, e fra le medesime parallele AF, BC: dico il parallelogrammo ABCD essere uguale al parallelogrammo EBCF.

Perciocchè, essendo ABCD parallelogrammo, la AD è uguale alla BC (*pr.34.*); e per la stessa ragione la EF è uguale alla BC; quindi la AD sarà uguale alla EF: ed è la DE comune; adunque tutta la AE è uguale a tutta la DF. Ma è pure la AB uguale alla DC; quindi le due AE, AB sono uguali alle due DF, DC, l'una all'altra, e l'angolo esteriore FDC è uguale all'interiore, ed opposto EAB; che però il triangolo EAB è uguale al triangolo FDC. Si tolga il comune triangolo DGE; sarà il rimanente trapezio ABGD uguale al rimanente EGCF: ed aggiunto il triangolo GBC comune; sarà tutto il parallelogrammo ABCD uguale a tutto il parallelogrammo EBCF.

Laonde i parallelogrammi *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti nelle uguali basi, e fra le medesime parallele, sono uguali fra loro.

Sieno i parallelogrammi ABCD, EFGH, [*fig.36.*], costituiti nelle ugnali basi BC, FG, e fra le medesime parallele BG, AH: dico il parallelogrammo ABCD essere uguale al parallelogrammo EFGH.

Giungansi BE, CH. E perchè la BC è uguale alla FG, e la FG alla EH (*pr.34.*), sarà la BC uguale alla EH: sono pure parallele, e le BE, CH le congiungono: e quelle che congiungono le uguali, e parallele, dalle medesime parti, sono ancor esse uguali, e parallele (*pr.33.*); adunque le EB, CH sono uguali, e parallele. Perciò EBCH è parallelogrammo, ed uguale al parallelogrammo ABCD, poichè ha con questo la stessa base BC, ed è costitnito fra le medesime parallele BC, AH (*pr.35.*). Per la medesima ragione il parallelogrammo EFGH è uguale allo stesso parallelogrammo EBCH. Laonde il parallelogrammo ABCD è uguale al parallelogrammo EFGH.

E perciò i parallelogrammi *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

I triangoli costituiti nella medesima base, e fra le medesime parallele, sono uguali fra loro.

Sieno i triangoli ABC, DBC [*fig.37.*] nella medesima base BC, e fra le medesime parallele AD, BC: dico il triangolo ABC essere uguale al triangolo DBC.

Si prolunghi la AD dall' una, e l' altra parte ne' punti E, F, per B tirisi la BE parallela alla CA, e per C la CF parallela alla BD. È dnnque parallelogrammo l' uno, e l' altro EBCA, DBCF; ed il parallelogrammo EBCA è uguale al parallelogrammo DBCF, essendo nella stessa base BC, e fra le medesime parallele BC, EF (*pr.35.*); ed il triangolo ABC è metà del parallelogrammo EBCA, giacchè questo è diviso per metà dal diametro AB (*pr.34.*); come pure il triangolo DBC è metà del parallelogrammo DBCF, perciocchè anche questo è diviso per metà dal diametro DC: e le metà di cose uguali sono fra loro uguali (*ass.7.*). Adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC.

Che però i triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

I triangoli costituiti nelle uguali basi, e fra le medesime parallele, sono uguali fra loro.

Sieno i triangoli ABC, DEF [*fig. 38.*] nelle uguali basi BC, EF, e fra le medesime parallele BF, AD: dico il triangolo ABC esser uguale al triangolo DEF.

Imperocchè si prolunghi AD dall' una, e l' altra parte ne' punti G, H, e si tiri per B la BG parallela alla CA, e per F la FH parallela alla ED. Adunque l' uno, e l' altro di essi GBCA, DEFH è parallelogrammo; ed è il parallelogrammo GBCA uguale al parallelogrammo DEFH, perchè sono nelle uguali basi BC, EF, e fra le medesime parallele BF, GH (*pr. 36.*). Ma il triangolo ABC è metà del parallelogrammo GBCA, giacchè il diametro AB divide questo per metà (*pr. 34.*); ed il triangolo DEF è metà del parallelogrammo DEFH, perciocchè il diametro DF lo divide per me-

tà: e le cose che sono metà delle uguali sono uguali fra loro (*ass.7.*). Adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF. È perciò i triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

I triangoli uguali costituiti nella medesima base, e dalle parti stesse, sono fra le medesime parallele.

Sieno i triangoli uguali ABC, DBC [*fig.39.*] nella medesima base BC, e dalle parti stesse: dico essere ancora fra le medesime parallele.

Giungasi AD, dovrà questa esser parallela alla BC. Poichè, se non è parallela, si tiri per A la linea retta AE parallela alla BC (*pr.31*), e giungasi EC. È dunque il triangolo ABC uguale al triangolo EBC, essendo nella stessa base BC, e fra le medesime parallele BC, AE (*pr. 37.*): ma il triangolo ABC è uguale all' altro DBC; quindi il triangolo DBC è ancora uguale al triangolo EBC, il maggiore al minore, che non può essere. Non è dunque AE parallela alla BC. Similmente dimostreremo niun'altra esser parallela, fuor che la AD; laonde la AD è parallela alla BC.

Per la qual cosa i triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

I triangoli uguali costituiti nelle uguali basi, *poste per diritto*, e dalle parti medesime, sono fra le medesime parallele.

Sieno gli uguali triangoli ABC , CDE [*fig 40.*] costituiti nelle uguali basi BC , CE , *poste per diritto* , e dalle parti medesime : dico essere eziandio fra le medesime parallele.

Giungasi AD , dovrà la AD esser parallela alla BE . Imperocchè se non è parallela , si tiri per A la AF parallela alla BE (*pr. 31.*) , ed uniscasi FE . È dunque il triangolo ABC uguale al triangolo FCE , essendo costituiti nelle basi uguali , e fra le medesime parallele BE , AF (*pr. 38.*) : ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE ; laonde il triangolo FCE sarà uguale al triangolo DCE , il minore al maggiore , che non può essere . Che però non è la AF parallela alla BE . Dimostreremo similmente niun' altra esser parallela fuor che, la AD ; perciò la AD è parallela alla BD.

Per la qual cosa i triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA.

Se il parallelogrammo, ed il triangolo abbiano la medesima base, e sieno fra le medesime parallele, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.

Il parallelogrammo ABCD [*fig. 41.*] , ed il triangolo EBC abbiano la medesima base BC , e sieno fra le medesime parallele BC , AE : dico essere il parallelogrammo ABCD doppio del triangolo EBC .

Giungasi AC . Sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EBC , perchè sono nella medesima base BC , e fra le medesime parallele BC , AE (*pr. 37*) : ma il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo ABC ; perciocchè il diametro AC lo divide per metà (*pr.34.*). Adunque sarà anche ABCD doppio del triangolo EBC.

È perciò se il parallelogrammo *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA.

Costituire nell' angolo rettilineo dato un parallelogrammo uguale ad un dato triangolo.

Sia dato il triangolo ABC [*fig.42.*], e l' angolo rettilineo dato sia D : bisogna nell' angolo rettilineo dato D costituire un parallelogrammo uguale al triangolo ABC.

Si divida la BC per metà in E (*pr. 10.*), e congiunta AE, si costituisca alla linea retta EC, nel punto E in essa, l' angolo CEF uguale ad esso D (*pr. 23.*), per A tirisi la AG parallela alla EC, e per C la CG parallela alla EF (*pr.31.*); adunque FECG è parallelogrammo.

Ed essendo la BE uguale alla EC, sarà anche il triangolo ABE uguale al triangolo AEC, perchè costituiti nelle uguali basi BE, EC, e fra le medesime parallele BC, AG (*pr. 38.*). Quindi il triangolo ABC è doppio del triangolo AEC. Ma è pure il parallelogrammo FECG doppio del triangolo AEC, essendo nella stessa base, e fra le medesime parallele (*pr.41.*) ; adunque il parallelogrammo FECG è ugnale al triangolo ABC, ed ha l' angolo CEF uguale al dato angolo D.

Per la qual cosa si è costituito, nell' angolo CEF uguale all' angolo dato D, il parallelogrammo FECG uguale al dato triangolo ABC. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

In ogni parallelogrammo, i supplementi di que' parallelogrammi, che sono d' intorno al diametro, sono uguali fra loro.

Sia il parallelogrammo ABCD [*fig. 43.*] , il cui diametro è AC , e d' intorno ad AC sieno i parallelogrammi EH , FG , e quei , che diconsi supplementi , BK , KD : dico essere il supplemento BK uguale all' altro KD.

Imperocchè essendo ABCD parallelogrammo , ed AC il suo diametro , il triangolo ABC è uguale al triangolo ADC (*pr. 34.*) . E similmente essendo EKHA parallelogrammo, ed AK il suo diametro , il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK. Per la stessa ragione anche il triangolo KGC è uguale al triangolo KFC. Che però essendo il triangolo AEK uguale al triangolo AHK,ed il triangolo KGC all'altro KFC; sarà il triangolo AEK insieme col triangolo KGC uguale al triangolo AHK insieme con l'altro KFC: ed è tutto il triangolo ABC uguale a tutto ADC ; adunque il rimanente supplemento BK è uguale al rimanente supplemento KD.

Laonde i supplementi de'parallelogrammi *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XLIV.

PROBLEMA.

Alla data linea retta, in un angolo rettilineo dato, applicare un parallelogrammo uguale ad un dato triangolo.

Sia la linea retta data AB [*fig.44.*] , il triangolo dato C , e l' angolo rettilineo dato D ; fa d' uopo alla data linea retta AB, nell' angolo uguale a D , applicare un parallelogrammo uguale al dato triangolo C .

Costituiscasi il parallelogrammo BEFG uguale al triangolo C , nell' angolo EBG uguale all' angolo D (*pr. 42.*) , e pongasi la BE per diritto alla AB ; indi si prolunghi la FG in H , e per A tirisi AH parallela ad una di esse BG, EF, e giungasi BH. Perchè dunque la linea retta HF cade nelle pa-

rallele AH, EF, gli angoli AHF,HFE sono uguali a due retti (*pr.29.*) ; e perciò gli altri BHF , HFE sono minori di due retti . Ma se in due linee rette cade una terza, e fa gli angoli interiori , dalle stesse parti, minori di due retti , quelle due linee rette prolungate indefinitamente debbono incontrarsi (*post.5*) ; adunque le HB , FE prolungate s' incontreranno . Prolunghinsi , e s' incontrino in K , e per K si tiri la KL parallela alla EA , o alla FH ; e si prolunghino le HA , GB ne' punti L , M. Adunque HLKF è parallelogrammo , di cui è diametro HK , e d' intorno ad HK sono i parallelogrammi AG , ME , ed LB , BF supplementi di essi ; perciò LB è uguale a BF (*pr.43.*) : ma è pure BF uguale al triangolo C ; onde eziandio LB sarà uguale al triangolo C . Or l' angolo GBE è uguale all'altro ABM (*pr.15.*) : ed è esso GBE uguale all' angolo D ; sarà quindi anche l' angolo ABM uguale all' angolo D.

Che perciò alla data linea retta AB , nell' angolo dato D , si è applicato il parallelogrammo LB uguale al dato triangolo C . — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA.

Costituire in un angolo rettilineo dato un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo.

Sia ABCD [*fig. 45.*] il dato rettilineo , ed E il dato angolo rettilineo ; fa d' uopo costituire in un angolo uguale ad E un parallelogrammo uguale al rettilineo ABCD.

Si giunga BD,e costituiscasi il parallelogrammo FH uguale al triangolo ABD , nell' angolo FKH uguale all' angolo E (*pr. 42.*) ; indi si applichi alla linea retta GH il parallelogrammo GM uguale al triangolo BDC , nell' angolo GHM u-

guale all'angolo E. (*pr.44.*) Ed essendo l' angolo E uguale a ciascuno degli angoli FKH,GHM; sarà ancora l' angolo FKH uguale a GHM ; pongasi KHG comune ; saranno gli angoli KHG , FHM uguali agli uguali KHG,GHM ; ma FKH,KHG sono uguali a due retti (*pr.29.*) ; adunque anche KHG,GHM saranno uguali a due retti . Or poichè alla linea retta GH , nel punto H in essa , le due linee rette KH , HM , non poste dalle medesime parti , fanno gli angoli adjacenti uguali a due retti ; perciò la KH è per diritto alla HM (*pr.14*) . E perchè nelle parallele KM , FG cade la linea retta HG , gli angoli alterni MHG , HGF sono uguali (*pr.29.*) ; pongasi comune HGL , e saranno gli angoli MHG , HGL uguali agli angoli HGF , HGL : ma gli angoli MHG , HGL sono uguali a due retti ; perciò ancor gli angoli HGF , HGL saranno uguali a due retti , e quindi la FG sarà per diritto alla GL (*pr. 14*). Or essendo KF uguale , e parallela alla HG , come pure la HG alla ML ; sarà la KF uguale , e parallela alla ML(*pr.30*): ma sono anche parallele le KM , FL ; onde LMKF è parallelogrammo. Ed essendo il triangolo ABD uguale al parallelogrammo HF, ed il triangolo BDC al parallelogrammo HL; sarà tutto il rettilineo ABCD uguale a tutto il parallelogrammo KFLM.

Quindi si è costituito il parallelogramo KFLM uguale al dato rettilineo ABCD, nell' angolo FKM uguale al dato angolo rettilineo E . — *C. B. F.*

Cor. Dalle cose già dette rendesi manifesto il modo di applicare ad una data linea retta un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo , in un angolo uguale ad un angolo rettilineo dato. Poichè è chiaro, che si otterrà ciò, che domandasi , incominciando dall' applicare alla data linea retta un parallelogrammo uguale al primo triangolo ABD , ed avente un angolo uguale al dato (*pr. 44.*) (v.n.).

PROPOSIZIONE XLVI.

PROBLEMA.

Descrivere il quadrato da una linea retta data.

Sia data la linea retta AB [*fig. 46.*] ; fa d'uopo descrivere da essa il quadrato .

Si tiri alla linea retta AB , dal punto A dato in essa , la perpendicolare AC(*pr.11.*), e si ponga la AD uguale alla AB (*pr. 3.*) ; poi per D tirisi la DE parallela alla AB (*pr.31.*), e per B la BE parallela alla AC.

È dunque ADEB parallelogrammo ; e perciò la AB è uguale alla DE , e la AD alla BE (*pr. 34.*) : ma anche la BE è uguale alla AD ; adunque le quattro linee rette BA , AD , DE , EB sono uguali fra loro ; e perciò il parallelogrammo ADEB è equilatero . Dico essere anche rettangolo . Poichè nelle parallele AB , DE cade la linea retta AD , gli angoli BAD , ADE sono uguali a due retti ((*pr. 29.*) : ma BAD è retto ; adunque anche ADE sarà retto. Or gli angoli opposti de' parallelogrammi sono uguali fra loro (*pr.34.*) ; perciò ciascuno degli angoli BED , ABE , che sono respettivamente opposti ai precedenti, sarà retto , ed ABED è rettangolo . È stato anche dimostrato equilatero ; laonde è quadrato (*def.30.*); ed è descritto dalla data linea retta AB. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli il quadrato , che si descrive dal lato , che sottende l' angolo retto , è uguale a'quadrati , che si descrivono da' lati , che contengono l' angolo retto.

Sia il triangolo rettangolo ABC [*fig.47.*], con l' augolo BAC retto : dico il qnadrato descritto dal lato BC essere uguale a' quadrati descritti da' lati BA , AC.

Descrivasi dalla BC il quadrato BDEC (*pr. 46.*), e dalle BA , AC i quadrati GB , HC ; per A si tiri AL parallela alla BD , o alla CE (*pr.31.*) , e giungansi AD , FC.

E poichè è retto ciascuno degli angoli BAG , BAC, perciò ad una linea retta AB , nel punto A in essa, le due linee AC , AG , non poste dalle medesime parti , fanno gli adjacenti angoli BAC , BAG uguali a due retti ; adunque CA è per diritto alla AG (*pr.14.*) : e per la stessa ragione la AB è per diritto alla AH. Or l' angolo DBC è uguale all' angolo FBA , essendo amendue retti , aggiungasi comune ABC , e sarà tutto l' angolo DBA uguale a tutto l' angolo FBC ; quindi essendo le due AB , BD uguali alle due FB, BC, l'una all' altra , e l' angolo DBA uguale all' angolo FBC , sarà la base AD uguale alla base FC , ed il triangolo ABD uguale al triangolo FBC (*pr.4.*). Ma il parallelogrammo BL è doppio del triangolo ABD, perchè hanno la stessa base BD , e sono fra le medesime parallele BD, AL (*pr.41.*) ; ed il quadrato GB è doppio del triangolo FBC , perchè ancor essi hanno la stessa base FB, e sono fra le medesime parallele FB, GC : e quelle cose , che sono doppie di uguali , sono altresì uguali fra loro (*ass. 6.*) ; adunque il parallelogrammo BL è uguale al quadrato GB. Nel modo stesso, giunte le AE , BK , si dimostrerà il parallelogrammo CL uguale al quadrato HC ; quindi tutto il quadrato DBCE è uguale a' due quadrati GB , HC . Ma il quadrato DBCE è descritto dalla linea retta BC; ed i quadrati GB, HC lo sono dalle AB, AC. Adunque il quadrato BE descritto dal lato BC è uguale a' quadrati GB , HC descritti da'lati BA , AC.

E perciò ne'triangoli rettangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XLVIII.

TEOREMA.

Se il quadrato descritto da uno de' lati del triangolo sia uguale a'quadrati descritti da'rimanenti lati; l' angolo contenuto da questi sarà retto (*v.n.*)

Nel triangolo ABC[*fig.48.*], sia il quadrato, che si descrive dal lato BC uguale a' quadrati descritti dagli altri due lati BA , AC : dico l' angolo BAC esser retto .

Dal punto A si tiri la AD perpendicolare alla AC(*pr.11.*); pongasi la AD uguale alla BA , e si giunga la DC.

E perchè la DA è uguale alla AB , sarà il quadrato della DA (*) uguale al quadrato della AB ; aggiungasi comune il quadrato della AC , e saranno i quadrati delle DA , AC uguali a' quadrati delle BA , AC. Ma il quadrato della DC è uguale a'quadrati delle DA, AC, essendo retto l'angolo DAC (*pr. 47.*) , ed il quadrato della BC si è posto uguale a' quadrati della BA , AC : perciò il quadrato della DC è uguale a quello della BC ; e quindi il lato DC è uguale al lato BC . Or essendo la AD uguale alla AB, e la AC comune, saranno le due DA, AC uguali alle due BA, AC, è pure la base DC uguale alla base BC ; adunque l'angolo DAC è uguale all'angolo BAC (*pr.8.*) : che perciò essendo retto l' angolo DAC , anche l'altro BAC sarà retto.

Laonde se il quadrato *ec.* — *C. B. D.*

Fine del primo libro.

(*) *N.B.* In vece di dire *il quadrato, che si descrive sopra la linea retta AB* , si dice per brevità *il quadrato della AB* .

IL SECONDO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi *contenuto* dalle due linee rette, che comprendono l' angolo retto.

II. In ogni parallelogrammo, ciascuno de' parallelogrammi, che sono d' intorno al diametro di esso, co'due supplementi, si chiamerà *gnomone*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se vi sieno due linee rette, l' una delle quali sia divisa in quante parti si vogliano; il rettangolo contenuto dalle due linee rette è uguale a' rettangoli, che contengonsi dalla linea retta non divisa, e da ciascuna parte dell' altra.

Sieno le due linee rette A, BC [*fig. 1.*], e la BC sia divisa comunque ne'punti D, E: dico il rettangolo contenuto dalle linee rette A, BC essere uguale ai rettangoli contenuti da A, BD, da A, DE, e da A, EC.

Dal punto B si tiri la BF perpendicolare alla BC (11.I.), e pongasi BG uguale ad A, poi per G tirisi la GH parallela

alla BC (31. I.), e per D , E , C si tirino pure le DK, EL, CH parallele alla BG.

Ciò posto, il rettangolo BH è uguale a'rettangoli BK,DL, EH: ed è il rettangolo BH contenuto dalle A , BC ; poichè esso è contenuto dalle CB , BG , e BG è uguale ad A ; ed il rettangolo BK è contenuto dalle A , BD , mentre esso è contenuto dalle BD , BG , e BG è uguale ad A : del pari il rettangolo DL è contenuto dalle A , DE , perchè DK , ossia BG è uguale ad A ; e similmente il rettangolo EH è contenuto dalle A , EC. Laonde il rettangolo contenuto dalle A , BC , è uguale a' rettangoli contenuti dalle A, BD dalle A , DE , e dalle A , EC.

E perciò se vi sieno due linee rette *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa ; i rettangoli contenuti da tutta la linea , e da ciascuna delle parti, sono uguali al quadrato di tutta la linea.

Sia la linea retta AB [*fig.2.*] comunque divisa nel punto C : dico , che il rettangolo contenuto dalle AB, BC, insiesieme con quello , che si contiene dalle BA, AC sia uguale al quadrato della AB.

Si descriva dalla AB il quadrato ADEB (46. I.) , e per C tirisi la CF parallela ad AD , o BE (31. I.).

E poichè il quadrato AE è uguale a' rettangoli AF , CE , ed è AE il quadrato di AB , ed il rettangolo AF è contenuto dalle BA , AC , perchè è contenuto dalle DA, AC, ed è DA uguale ad AB: e similmente il rettangolo CE è contenuto dalle AB, BC , essendo BE uguale ad AB ; perciò il ret-

tangolo di BA, AC (*), insieme col rettangolo di AB, BC, è uguale al quadrato di AB.

Laonde se una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il rettangolo contenuto da tutta la linea e da una parte di essa è uguale al rettangolo contenuto dalle parti, una col quadrato della parte predetta.

Sia la linea retta AB [*fig.3.*] comunque divisa in C: dico essere il rettangolo di AB,BC uguale al rettangolo di AC, CB, una col quadrato di BC.

Si descriva dalla BC il quadrato CDEB (46. I.), si produca ED in F, e per A si tiri AF parallela a CD, o BE.

Sarà il rettangolo AE uguale a' rettangoli AD, CE: ed è il rettangolo AE contenuto dalle AB, BC, perciocchè è contenuto dalle AB, BE, delle quali BE è uguale a BC; AD è il rettangolo contenuto dalle AC, CB, poichè DC è uguale a CB; e finalmente DB è il quadrato di BC. Adunque il rettangolo di AB, BC, è uguale al rettangolo di AC, CB, una col quadrato di BC.

Se dunque una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

(*) *N. B.* Per evitare le frequenti ripetizioni della voce contenuto, *il rettangolo contenuto dalle linee rette BA, AC* è talvolta detto semplicemente, *il rettangolo di BA, AC.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il quadrato di tutta la linea è uguale a' quadrati delle parti di essa, una col doppio del rettangolo contenuto dalle medesime parti.

Sia la linea retta AB [*fig.4.*] comunque divisa in C: dico esser il quadrato di AB uguale a' quadrati di AC, CB, una col doppio del rettangolo contenuto dalle AC, CB.

Si descriva dalla AB il quadrato ADEB, e giungasi BD; poi per C si tiri CGF parallela ad una di esse AB,DE, e per G la HK parallela ad una delle AB, DE.

E poichè la CF è parallela alla AD, e cade in esse la BD; perciò l' angolo esteriore BGC è uguale all'interiore, ed opposto ADB (29.I.): ma l' angolo ADB è ugnale all' angolo ABD, perchè il lato BA è uguale al lato AD (5. I.); quindi l' angolo CGB è uguale all' angolo GBC, e però il lato BC è uguale al lato CG (6.I.). Or il lato CB è altresì uguale al lato GK, e CG a BK (34.I.); adunqne eziandio GK è nguale a KB: onde il quadrilatero CGKB è equilatero. Dico inoltre essere rettangolo. Imperocchè essendo la CG parallela alla BK, e cadendo in esse la CB, gli angoli KBC, GCB sono uguali a due retti (29.I.); ed è retto l' angolo KBC; adunque anche GCB sarà retto: quindi eziandio retti saranno gli angoli opposti KGC, GKB (34.I.); e però CGKB è rettangolo: ma si è dimostrato equilatero; adunqne è quadrato, ed è quello, che si fa da BC. Per la stessa ragione HF è il quadrato di HG, ovvero di AC. Laonde FH, CK sono i quadrati di AC, e di CB. E poichè il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE (43. I); e GA è il contenuto da AC, CB, essendo CG uguale a CB; perciò

EG sarà altresì uguale quello, che si contiene dalle AC, CB; quindi i rettangoli AG, GE sono uguali al doppio del rettangolo di AC, CB: e sono HF, CK i quadrati di AC, CB; adunque i quattro parallelogrammi HF, CK, AG, GE sono uguali a' quadrati di AC, CB, ed al doppio del rettangolo di AC, CB. Ma HF, CK, AG, GE sono tutto il quadrato ADEB, ch' è descritto dalla AB; quindi il quadrato di AB è uguale a' quadrati di AC, CB, ed al doppio del rettangolo di AC, CB.

E perciò se una linea retta *ec.* — *C.B.D.* (*v.n.*).

Cor. Dalla dimostrazione fatta si vede chiaramente, che: *Ne' quadrati, i parallelogrammi d' intorno al diametro, sono anche quadrati.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; il rettangolo contenuto dalle parti disuguali, insieme col quadrato della linea, ch' è fra i punti delle sezioni, è uguale al quadrato della metà della linea (*v.n.*).

Sia la linea retta AB [*fig.5.*] divisa in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in D: dico il rettangolo contenuto dalle AD, DB, insieme col quadrato di CD, essere uguale al quadrato di CB.

Descrivasi dalla BC il quadrato CEFB, e giungasi BE; poi per D si tiri la DHG parallela a CE, o BF, e per H tirisi KLM parallela a CB, o EF; finalmente anche per A si tiri AK parallela a CL, o BM.

Ed essendo il supplemento CH uguale al supplemento HF (43. I.), aggiungasi DM comune, e sarà tutto CM uguale a

tutto DF : ma CM è uguale a CK, perchè CB è uguale a CA (36. I.) ; adunque AL sarà uguale a DF. Aggiungasi anche a questi CH comune, e sarà tutto AH uguale ad FD, DL : ma AH è il rettangolo di AD, DB, poichè DH è uguale a BD, ed FD, DL formano lo gnomone ONX ; quindi lo gnomone ONX è uguale al rettangolo di AD, DB. Si aggiunga anche a questi comune LG, ch' è uguale al quadrato di CD (*c*.4,II.) ; e sarà lo gnomone OMX, insieme con LG uguale al rettangolo di AD, DB, insieme col quadrato di CD. Ma lo gnomone OMX, ed LG formano tutto il quadrato CEFB, che si fa da CB ; perciò il rettangolo di AD, DB, insieme col quadrato di CD, è uguale al quadrato di CB.

Quindi se una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa per metà, e ad essa aggiungasi per diritto un' altra linea retta ; il rettangolo contenuto da tutta la linea coll' aggiunta, e dalla stessa aggiunta, una col quadrato della metà, è uguale al quadrato, che si descrive dalla composta della metà, e dell' aggiunta, come da una linea sola. (*V.N.*)

Si divida la linea retta AB [*fig.6.*] per metà nel punto C, e vi si aggiunga per diritto BD: dico il rettangolo di AD, DB, una col quadrato di CB, essere uguale al quadrato di CD.

Descrivasi dalla CD il quadrato CEFD, e si giunga DE ; poi si tiri per B la BHG parallela alla CE, o DF, e per H si tiri KLM parallela ad AD, ovvero EF: finalmente per A si tiri AK parallela a CL, o DM.

E poichè la AC è uguale alla CB, sarà il rettangolo AL

uguale al rettangolo CH(36.I); ma CH è uguale ad HF(43.I); adunque AL sarà uguale ad HF : si aggiunga comune CM ; e sarà tutto il rettangolo AM uguale allo gnomone NXO. Ed è AM il rettangolo contenuto da AD , DB , poichè DM è uguale a DB ; adunque lo gnomone NXO è uguale al rettangolo di AD , DB. Si aggiunga similmente comune LG , ch'è uguale al quadrato di CB (*c*.4.II.) , e sarà il rettangolo di AD,DB, una col quadrato di CB uguale allo gnomone NXO, una con LG. Or lo gnomone NXO , ed LG sono tutto il quadrato CEFD , che si fa dalla CD. Adunque il rettangolo di AD, DB, una col quadrato di CB è uguale al quadrato di CD .

E perciò se una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa comunque ; i quadrati, l'uno descritto dall' intera linea , e l' altro da una parte , sono uguali al doppio del rettangolo contenuto da tutta la linea , e dalla detta parte, insieme col quadrato dell'altra parte.

Sia la linea retta AB comunque divisa nel punto C [*fig.7.*]: dico , che i quadrati di AB , BC sieno uguali al doppio del rettangolo contenuto da AB,BC, insieme col quadrato di AC.

Si descriva dalla AB il quadrato ADEB (46.1.), e costituiscasi la figura.

E poichè il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE (43.I.) , si aggiunga comune CK (*c*.4.I.) , e sarà tutto AK uguale a tutto CE ; che però i rettangoli AK, CE sono il doppio del rettangolo AK. Ma i rettangoli AK , CE formano lo gnomone NLM , ed il quadrato CK ; adunque lo gnomone

NLM, ed il quadrato CK, sono il doppio del rettangolo AK. È pure il rettangolo di AB, BC, preso due volte, il doppio di AK, poichè BK è uguale a BC; adunque lo gnomone NLM, ed il quadrato CK sono uguali al doppio del rettangolo di AB, BC. Aggiungasi comune HF, ch' è uguale al quadrato di AC; e sarà lo gnomone NLM, ed i quadrati CK, HF uguale al doppio del rettangolo di AB, BC, ed al quadrato di AC. Ma lo gnomone NLM, ed i quadrati CK, HF formano ADEB, insieme con CK, cioè i quadrati di AB, BC; laonde i quadrati di AB, BC sono uguali al doppio del rettangolo di AB, BC, insieme col quadrato di AC.

E perciò se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il quadruplo del rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una delle parti, insieme col quadrato dell' altra parte, è uguale al quadrato, che si descrive da tutta la linea, e dalla parte predetta, come da una linea sola.

Sia la linea retta AB [*fig.8.*] divisa comunque in C: dico, che il quadruplo del rettangolo contenuto da AB, BC, una col quadrato di AC, sia uguale al quadrato, che si descrive dalle AB, BC, come da una linea sola.

La linea retta AB si prolunghi in D, e si ponga BD uguale a CB; poi descrivasi dalla AD il quadrato AEFD, e si costituisca la doppia figura.

E perchè la CB è uguale alla BD, e la CB è uguale alla GK (34.I.), la BD alla KN, sarà anche la GK uguale alla

KN ; e per la medesima ragione la PR è nguale alla RO. Or perchè la CB è uguale alla BD , e la GK alla KN ; sarà il rettangolo CK uguale al rettangolo KD , ed il rettangolo GR uguale all' altro RN (36.I.). Ma CK è uguale ad RN, comecchè supplementi del parallelogrammo CO (43.I.); onde eziandio BN è uguale a GR : perciò i quattro rettangol i BN , CK , GR , RN sono uguali fra loro , e quindi sono insieme il quadruplo del rettangolo CK. Di nuovo , poichè la CB è nguale alla BD , e la BD alla BK (*c*.4.II.), o sia alla CG ,la CB alla GK , o sia alla GP, sarà ancora la CG nguale alla GP : è pure la PR uguale alla RO ; perciò il rettangolo AG è uguale al rettangolo MP , e 'l rettangolo PL all' altro RF : ma MP è uguale a PL , poichè sono supplementi del parallelogrammo ML ; quindi anche AG è uguale ad RF. Per la qual cosa i quattro parallelogrammi AG,MP,PL, RF sono fra loro nguali ; e però tutt' insieme sono il quadruplo di AG. Si è anche dimostrato, che i quattro parallègrammi CK, KD, GR, RN sono insieme il quadruplo di CK; quindi gli otto parallelogrammi, che formano lo gnomone STY, sono il quadruplo del rettangolo AK. E poichè AK è il rettangolo contenuto da AB,BC, essendo BK uguale a BC; sarà il rettangolo contenuto dalle AB,BC, preso quattro volte , quadruplo di AK. Ma si è dimostrato lo gnomone STY anche quadruplo di AK; adunque il quadruplo del rettangolo di AB, BC è uguale allo gnomone STY : si aggiunga ad essi comune XH, ch'è nguale al quadrato di AC (*c*.4.II.); sarà il quadruplo del rettangolo di AB, BC, insieme col quadrato di AC uguale allo gnomone STY , ed al quadrato XH . Or lo gnomone STY , ed XH formano tutto il quadrato AEFD , che si descrive dalla AD ; adunque il quadruplo del rettangolo di AB , BC , insieme col quadrato di AC è uguale al quadrato di AD , o sia di AB, BC , come da una linea sola.

Laonde se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; i quadrati delle parti disuguali di tutta la linea, sono il doppio del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, ch'è fra i segamenti.

Sia la linea retta AB [*fig. 9.*] divisa in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in D: dico, che i quadrati di AD, DB sieno il doppio de' quadrati di AC, CD.

Si tiri dal punto C ad AB la perpendicolare CE, la quale si ponga uguale a ciascuna di esse AC, CB; giungansi le EA, EB, e per D si tiri la DF parallela alla CE, per F la FG parallela alla AB, e giungasi AF.

Poichè dunque la AC è uguale alla CE, sarà l' angolo EAC uguale all'angolo AEC (5.I.); ed essendo retto l'angolo C, i rimanenti angoli EAC, AEC saranno uguali ad un retto (32.I.): e sono uguali fra loro; adunque l' uno, e l' altro di essi AEC, EAC è la metà di un retto. E per la medesima ragione l'uno, e l' altro di essi CEB, EBC è la metà di un retto; onde tutto l' angolo AEB è retto. Ed essendo l'angolo GEF la metà di un retto, ed EGF retto, perchè uguale all'interiore, ed opposto ECB (29.I.); sarà anche il rimanente EFG la metà di un retto; perciò l'angolo GEF è uguale all'altro EFG, e quindi il lato EG è uguale al lato GF (6.I.). Similmente, essendo l'angolo B la metà di un retto, e l' angolo FDB retto, perchè uguale all'interno, ed opposto ECB; sarà il rimanente BFD anche la metà di un retto: quindi l' angolo B è uguale all' angolo DFB; e però il lato DF al lato DB.

Or poichè la AC è uguale alla CE ; sarà il quadrato della AC uguale al quadrato della CE ; laonde i quadrati di AC , e di CE sono il doppio del quadrato di AC : ma a' quadrati di AC , CE è uguale quello di AE , essendo retto l' angolo ACE (47.I.) ; adunque il quadrato di AE è doppio del quadrato di AC . Di nuovo essendo la EG uguale alla GF , il quadrato di EG sarà uguale a quello di GF ; adunque i quadrati di EG , e di GF sono il doppio del quadrato di GF ; ma a' quadrati di EG , GF è uguale il quadrato di EF ; adunque il quadrato di EF sarà doppio di quello di GF : ed è GF uguale a CD ; quindi il quadrato di EF è doppio del quadrato di CD . È pure il quadrato di AE doppio di quello di AC : laonde i quadrati di AE , EF sono il doppio de' quadrati di AC , CD . Per la qual cosa essendo a' quadrati di AE , EF uguale il quadrato di AF, poichè l' angolo AEF è retto ; sarà il quadrato di AF doppio de' quadrati di AC , CD : che però al quadrato di AF essendo uguali i quadrati di AD , DF , per l' angolo in D retto ; anche i quadrati di AD , DF saranno il doppio de' quadrati di AC , CD . Ma la DF è uguale alla DB ; i quadrati dunque di AD , DB sono il doppio de' quadrati di AC, CD.

Se dunque una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa per metà , e ad essa aggiungasi per diritto un' altra linea retta ; i due quadrati descritti, uno da tutta la linea coll'aggiunta , l' altro dall' aggiunta , sono il doppio del quadrato della metà , e del quadrato della composta della metà, e dell'aggiunta, come da una linea sola.

Sia la linea retta AB [*fig. 10.*] divisa per metà iu C, e per diritto ad essa aggiungasi qualunqoe linea retta BD : dico, che i quadrati di AD, DB sieno il doppio de'quadrati di AC, CD.

Dal punto C si tiri la CE perpendicolare alla AB, che pongasi uguale a ciascuna di esse AC, CB, e ginngansi lo AE, EB ; poi per E si tiri la EF parallela alla AD, e per D la DF parallela alla CE. E perchè n elle parallele EC, FD cade la linea retta EF, gli angoli CEF, EFD sono uguali a doe retti (29. I.) ; e perciò gli angoli FEB, EFD sono mioori di due retti. Ma due linee rette prolungate indefinitamente dalle parti ove gli aogoli sooo minori di due retti debbono incontrarsi (*post. 5.*) ; adooque le EB, FD prodotte dalle parti B, D dovranno incontrarsi : si prolunghioo, ed iocootrinsi nel pnoto G, e si giooga AG.

Perchè dunque la AC è uguale alla CE, l' angolo AEC sarà uguale all' aogolo EAC : ma l' angolo in C è retto ; perciò l' uno, e l' altro di essi EAC, AEC è metà di un retto (32. I.). Per la stessa ragione, sì l' angolo CEB, che l' altro EBC è metà di un retto ; qoindi l' angolo AEB è retto. Or essendo EBC la metà di un retto, sarà ancho la metà di un retto DBG, che gli è verticale (15.I.). Ma l'angolo BDG è retto, poichè è uguale all' alterno DCE (29.I.) quindi il rimaneote aogolo DGB è pnre la metà di un retto, e perciò uguale a DBG, onde il lato BD è ugnale al lato DG. Similmeote, perchè l'angolo FGE è la metà di nn retto, e l' angolo F è retto, come oguale all' angolo opposto C ; sarà il rimaneote angolo FEG aoche la metà di un retto ; quindi ugoale ad EGF, e perciò il lato EF è nguale al lato FG.

Or essendo EC nguale a CA, il quadrato di EC è uguale a quello di CA ; e però i quadrati di EC, CA sono il doppio del quadrato di CA ; ma il quadrato di EA è uguale ai quadrati di EC, CA ; aduoque il quadrato di EA è il doppio di quello di AC. E perchè la GF è uguale alla FE, il

quadrato di GF è pure uguale al quadrato di FE; e perciò i quadrati di GF, FE sono il doppio del quadrato di EF: ma a' quadrati di GF, FE è uguale il quadrato di EG; adunque il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF. È poi EF uguale a CD (34.I.); sarà perciò il quadrato di EG doppio del quadrato di CD: e si è anche dimostrato il quadrato di EA doppio del quadrato di AC; quindi i quadrati di AE, EG sono il doppio de' quadrati di AC, CD. Or a' quadrati di AE, EG è uguale il quadrato di AG (47. I.); onde sarà il quadrato di AG il doppio de' quadrati di AC, CD: ma al quadrato di AG sono uguali i quadrati di AD, DG; perciò anche i quadrati di AD, DG sono il doppio de' quadrati di AC, CD: ed è DG uguale a DB; adunque i quadrati di AD, DB sono il doppio da' quadrati di AC, CD.

Per la qual cosa, se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Dividere una linea retta data in modo, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una delle parti, sia uguale al quadrato dell'altra parte.

Sia data la linea retta AB [*fig.11.*]; fa d' uopo dividerla in modo, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una delle parti, sia uguale al quadrato dell' altra parte.

Si descriva dalla AB il quadrato ACDB (46. I.), dividasi AC per metà in E (10.I.), e si giunga BE; indi producasi la CA in F, e si ponga EF uguale a BE, e descritto dalla AF il quadrato FGHA, si produca GH in K: dico che la linea retta AB resti divisa in H in modo, che il rettangolo di AB, BH sia uguale al quadrato di AH.

Perciocchè essendo la linea retta AC divisa per metà in E, e per diritto ad essa aggiunta la AF ; il rettangolo delle CF, FA insieme col quadrato di AE , è uguale al quadrato di EF (6.II.) : ma la EF è uguale alla EB ; laonde il rettangolo di CF, FA, insieme col quadrato di AE , è uguale al quadrato di EB. Or questo quadrato è uguale a'quadrati di BA, AE , perchè è retto l' angolo in A (47.I.) ; adunque il rettangolo di CF , FA , una col quadrato di AE , è uguale a' quadrati di BA,AE: si tolga il comune quadrato di AE, e sarà il rimanente rettangolo di CF , FA uguale al quadrato di AB . È poi il rettangolo di CF , FA lo stesso che FK , poichè AF è uguale ad FG , ed AD è il quadrato di AB ; adunque il rettangolo FK è uguale al quadrato di AD : tolgasi comune AK ; sarà il rimanente rettangolo FH uguale al rimanente HD : ed è HD il rettangolo di AB , BH, poichè AB è uguale a BD, ed FH è il quadrato di AH; adunque il rettangolo di AB , BH è uguale al quadrato di AH.

E perciò la data linea retta AB si è divisa in H in modo , che il rettangolo di AB, BH sia uguale al quadrato di AH— *C. B. F.* (*)

(*) Si vegga per questa proposizione la Nota alla prop. 30. VI.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Ne'triangoli ottusangoli; il quadrato del lato, che sottende l' angolo ottuso, è maggiore de' quadrati de'lati, che comprendono un tal angolo, per lo doppio del rettangolo contenuto dall'un de'lati d'intorno all' angolo ottuso, cioè da quello nel quale prolungato cade la perpendicolare dal vertice dell' angolo opposto, e dalla linea retta, che tal perpendicolare taglia sul prolungamento di esso, verso l' angolo ottuso (*V.N.*).

Sia il triangolo ottusangolo ACB [*fig.* 12.], che ha ottuso l' angolo BCA, e dal punto A si tiri alla BC prolungata la perpendicolare AD : dico, che il quadrato di AB sia maggiore de' quadrati di AC, CB, per lo doppio del rettangolo contenuto dalle BC, CD.

Imperocchè la linea retta BD essendo divisa comunque nel punto C, il quadrato di BD è uguale ai quadrati di BC, CD, una col doppio del rettangolo di BC, CD (4. II.) : aggiungasi comune il quadrato di AD; saranno i quadrati di BD, DA uguali a' quadrati di BC, CD, DA, una col doppio del rettangolo di BC, CD. Ma a' quadrati di BD, DA è uguale il quadrato di AB, perchè è retto l' angolo in D (47. I.), mentre la AD è perpendicolare alla BD; ed ai quadrati di AD, DC è uguale il quadrato di AC; adunque il quadrato di AB è uguale a' quadrati di AC, CB, una col doppio del rettangolo di BC, CD.

E perciò ne'triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Ne' triangoli obbliquangoli , *cioè ottusangoli* , o *acutangoli*, il quadrato del lato, che sottende un angolo acuto è minore de' quadrati de' lati, che lo comprendono , per lo doppio rettangolo contenuto dall' un de' lati d' intorno l' angolo acuto , cioè quello nel quale cade la perpendicolare dal vertice dell'angolo opposto,e dalla linea retta,che tal perpendicolare segna in esso, verso l' angolo acuto (*V.N.*)

Sia il triangolo obbliquangolo ACB [*f.* 12. *e* 13.] , che ha acuto l' angolo B, e dal punto A si tiri alla BC la perpendicolare AD : dico, che il quadrato di AC sia minore de'quadrati di CB , BA , per lo doppio rettangolo di BC , BD.

Imperocchè i quadrati di CB,BD essendo uguali al doppio del rettangolo di CB , BD una col quadrato di DC (7.II.) : aggiunto comune il quadrato di AD , saranno i quadrati di CB , BD , DA uguali al doppio del rettangolo di CB , BD , ed a' quadrati di AD , DC . Ma a' quadrati di BD , DA è uguale il quadrato di AB , perchè è retto l' angolo in D (47.I.) , ed a'quadrati di CD, DA è uguale il quadrato di AC ; onde i quadrati di CB , BA sono uguali al quadrato di AC, ed al doppio del rettangolo di CB, CD : e perciò il solo quadrato di AC è minore de' quadrati di CB, BA, per lo doppio rettangolo di CB , BD.

Quindi ne' triangoli obbliquangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Costituire il quadrato uguale ad un dato rettilineo (*V. N.*)

Sia dato il rettilineo A [*fig.14.*]; fa d' uopo costituire il quadrato nguale ad esso rettilineo.

Si costituisca il rettangolo BCDE nguale al rettilineo A (45.I.), e se la BE riescisse uguale alla ED, sarà fatto quello, che si domanda; poichè si sarà costituito il quadrato BD uguale al rettilineo A. Se poi ciò non ha luogo, si prolunghi nna di esse BE, ED, la BE in F, e si ponga la EF uguale alla ED; indi divisa la BF per metà in G, dal centro G, con l' intervallo GB, ovvero GF, si descriva il semicerchio BHF, si prolunghi la DE in H, e giungasi la GH.

Perchè dunque la linea retta BF è divisa in parti uguali in G, ed in parti disnguali in E, sarà il rettangolo di BE, EF, insieme col quadrato di EG, uguale al quadrato di GF (5.II.): ma è GF uguale a GH; quindi il rettangolo di BE, EF, insieme col quadrato di GE, è uguale al quadrato di GH. Or il quadrato di GH è uguale a' quadrati di GE, EH (47.I.); adunque il rettangolo di BE, EF, insieme col quadrato di EG, è uguale a' quadrati di HE, EG, e perciò tolto il comune quadrato di EG, sarà il rimanente rettangolo di BE, EF uguale al quadrato di EH. Ma il rettangolo di BE, EF è lo stesso, che il parallelogrammo BD, poichè EF è uguale ad ED; adunque il parallelogrammo BD è uguale al quadrato EH: e perciò essendo il parallelogrammo BD uguale al rettilineo A; sarà questo rettilineo uguale al quadrato di EH.

Si è dunque costituito un quadrato uguale ad un rettilineo dato, cioè quello, che si descrive dalla EH — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

I quadrati de' due lati di ogni triangolo sono uguali al doppio de' quadrati della metà della base, e della retta, che congiugne il punto medio di questa, col vertice del triangolo. (*V.N.*)

Sia BAC il triangolo [*fig. A.*], ed E il punto medio della sua base, che conginngasi col vertice A, per la EA : dico essere i quadrati de' lati BA, AC uguali al doppio de' quadrati di BE, EA.

Dal vertice A si tiri alla base BC la perpendicolare AD. Ed essendo nel triangolo AEC ottusangolo in E, il quadrato di AC uguale a' quadrati di AE,EC, insieme col doppio del rettangolo di CE, ovvero BE,ED (12.II.): e nell'altro triangolo AEB acutangolo in E, il quadrato di AB uguale a' i quadrati di AE, EB meno il doppio del rettangolo di BE, ED (13. II.); risultano perciò i quadrati di AB, AC uguali al doppio del quadrato di AE, insieme col doppio del quadrato di EB.

Laonde i quadrati de'due lati di ogni triangolo *ec. C.B.D.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Se dal vertice di un triangolo isoscele si tiri una qualche linea retta alla base di esso; sarà il quadrato di un lato del triangolo uguale alla somma, o alla differenza del quadrato della retta tirata, e del rettangolo de'segmenti della base, secondo che quella retta cada dentro, o fuori del triangolo. (*V.N.*)

Sia ABC [*fig.B.n.1. e 2.*] un triangolo isoscele, dal cui vertice A sia tirata alla base BC una qualche linea retta AD, che cada dentro del triangolo, o pur fuori: dico il quadrato del lato AB, ovvero AC pareggiare il quadrato della AD, aggiuntovi il rettangolo di BD, DC, se la AD cada dentro il triangolo, toltone se cada fuori del medesimo.

Dal vertice A si tiri alla base la perpendicolare AE (12.I.). Ed essendo il quadrato di AC uguale a' quadrati di AE,EC, e quello di AD uguale a' quadrati di AE,ED(47.I.); sarà la differenza de'quadrati di AC,AD uguale alla differenza de'quadrati di CE,ED,cioè uguale al rettangolo di BD,DC (5, *o* 6.II.); ov'è chiaro, che nel primo caso dal quadrato di AC siesi tolto quello di AD, e così pure da quello di EC l'altro di ED, ed il contrario siesi praticato nel secondo caso. Adunque nel primo caso, aggiugnendo comune il quadrato di AD, risulterà il quadrato di AC uguale a quello di AD, insieme col rettangolo di BD, DC; e nell'altro caso, aggiugnendo comune il quadrato di AC, e poi da ciò, che risulta togliendo comune il rettangolo di BD, DC, si avrà il quadrato di AC uguale alla differenza del quadrato di AD, e del rettangolo di BD, DC.

Quindi se dal vertice di un triangolo isoscele *ec.* *C.B.D.*

Fine del secondo libro.

IL TERZO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. Cerchi uguali sono quelli, che hanno diametri, ovvero raggi uguali (*v.n.*)

II. La linea retta dicesi *toccare* il cerchio, quando l' incontra, e prolungata non lo sega.

III. I cerchi si dicono *toccarsi* fra loro, quando incontrandosi non si segano.

IV. Le linee rette nel cerchio si dicono essere *ugualmente distanti* dal centro, quando le perpendicolari tirate ad esse dal centro sono uguali.

V. Dicesi poi esser *più distante* dal centro quella linea retta nella quale cade la perpendicolare maggiore.

VI. *Veggasi la def.* XIX. *lib. I.* (*v.n.*)

» VII. *Angolo del segmento* è quello, che si comprende
» dalla linea retta, ch' è base del segmento, e dalla cir-
» conferenza di esso (*v.n.*)

VIII. *Angolo nel segmento* è quello, che comprendesi dalle linee rette tirate da un punto della circonferenza del segmento, ai termini della linea retta, che n' è base.

IX. E tale angolo si dice *insistere* su la circonferenza, che rimane tra le linee rette comprendenti l' angolo.

X. *Settore* del cerchio è la figura contenuta da due raggi, che fanno angolo al centro, e dalla circonferenza, ch' è fra essi.

XI. *Segmenti simili* di cerchi sono quelli, che contengono angoli uguali; ovvero che hanno uguali gli angoli, che sono in essi.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Trovare il centro di un dato cerchio (*V.N.*).

Sia dato il cerchio ABC [*fig.1.*); fa d' uopo trovarne il centro.

Tirisi in esso comunque una linea retta AB, che si divida per metà in D (10. I.); poi dal punto D si tiri alla AB la perpendicolare DC (11. I.), la quale si prolunghi in E, e si divida la CE per metà in F: dico essere il punto F il centro del cerchio ABC.

Perciocchè, se non è F, sia, s'è possibile, un altro punto G, e giungansi le GA, GD, GB. Ed essendo la AD uguale alla DB, e la DG comune, saranno le due AD, DG uguali alle due DB, DG, l' una all' altra; è pure la base GA uguale alla base GB, poichè sono raggi (*d.*15.I.); quindi l' angolo ADG è uguale all' angolo GDB (8. I.). Or allorchè una linea retta insistendo sopra altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, ciascuno degli angoli uguali è retto (*d.*10.I.); adunque l' angolo GDB è retto: ma è anche retto l' angolo FDB; che perciò l' angolo FDB è uguale all' angolo GDB, il maggiore al minore; che non può essere. Non è dunque G il centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che verun altro punto lo sia fuori che F: quindi F è il centro del cerchio ABC. — *C.B.F.*

Cor. È chiaro da ciò, che se nel cerchio una linea retta seghi un' altra per metà, e ad angoli retti; il centro del cerchio debba trovarsi in quella segante (*V.N.*).

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se nella circonferenza del cerchio si prendano due punti ad arbitrio; la linea retta, che gli congiugne, cadrà dentro al cerchio.

Sia il cerchio ABC [*fig.2.*], e nella circonferenza di esso prendansi due punti ad arbitrio A, B: dico, che la linea retta tirata dal punto A all'altro B cada dentro al cerchio.

Perchè, s'è possibile, cada di fuori, tal che AEB, e preso il centro del cerchio ABC (1.III.), che sia D, si giungano le AD, DB, e poi tirisi la DE, la quale incontri la circonferenza in F. Or essendo la DA uguale alla DB, sarà l'angolo DAE uguale all'angolo DBE: e perchè si è prolungato il lato AE del triangolo DAE, l'angolo DEB sarà maggiore dell'altro DAE (16. I.); ma l'angolo DAE è uguale all'angolo DBE; laonde l'angolo DEB è maggiore dell'angolo DBE. Or il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore (18.I.); quindi la DB è maggiore della DE: è poi la DB uguale alla DF; adunque la DF è maggiore della DE, la minore della maggiore, ch'è impossibile. Laonde la linea retta tirata dal punto A al B non cade fuori del cerchio. Dimostreremo similmente, che nè anche cada nella stessa circonferenza; dovrà dunque necessariamente cadere dentro al cerchio.

E perciò, se nella circonferenza *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una linea retta, tirata nel cerchio per lo centro, seghi per metà un'altra linea retta non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti: e segandola ad angoli retti, la segherà per metà.

Sia il cerchio ABC [*fig. 3.*], e la linea retta CD tirata per lo centro di esso, seghi l'altra linea retta AB non tirata per lo centro per metà nel punto F: dico, che la segherà ad angoli retti.

Imperocchè si prenda il centro del cerchio ABC, che sia E, e giungansi le EA, EB. E poichè la AF è uguale alla FB, e la FE è comune; perciò sono le due AF, FE uguali alle due BF, FE, ed è la base EA uguale alla base EB; adunque l'angolo AFE sarà uguale all'angolo BFE: ma quando una linea retta stando sopra un'altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, è retto sì l'uno, che l'altro di questi angoli uguali (*d.*10.I.); adunque è retto sì l'angolo AFE, che l'altro BFE. E perciò la linea retta CD tirata per lo centro, segando per metà l'altra AB non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti.

Che se la CD seghi la AB ad angoli retti: dico, che la segherà per metà, cioè esser la AF uguale alla FB.

Poichè, fatta la stessa costruzione, essendo il raggio EA uguale all'altro EB, l'angolo EAF sarà uguale all'angolo EBF (5.I.): ma è pure l'angolo retto AFE uguale al retto BFE; adunque i due triangoli EBF, EAF hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, vale a dire EF, comune ad entrambi, che sottende uno degli angoli uguali; quindi avranno anche i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati (26.I.); e sarà perciò la AF uguale alla FB.

Se dunque nel cerchio ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se interseghinsi nel cerchio due linee rette non tirate per lo centro, non si segheranno, l'una l'altra, per metà.

Sia il cerchio ABCD (*fig. 4.*), e s' interseghino in esso nel punto E due linee rette AC, BD non tirate per lo centro: dico, che queste non seghinsi per metà, l'una l' altra.

S' è possibile, ciascuna di esse divida per metà l'altra, in modo, che sia la AE uguale alla EC, la BE alla ED; si trovi il centro del cerchio ABCD (1. III.), che sia F, e giungasi EF.

E poichè la linea retta EF tirata per lo centro sega per metà l' altra linea retta AC non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti (3. III.); perciò è retto l'angolo FEA. Similmente perchè la linea retta EF sega per metà l' altra linea retta BD, che non passa per lo centro, la segherà ad angoli retti; quindi è retto l' angolo FEB: e si è dimostrato anche retto l' angolo FEA; adunque l' angolo FEA sarà uguale all' altro FEB; il minore al maggiore, ch' è impossibile. Per la qual cosa le AC, BD non si segheranno, l'una l'altra, per metà.

E quindi se interseghinsi nel cerchio ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due cerchi s' interseghino, non avranno lo stesso centro.

S' interseghino due cerchi ABC, CDG [*fig.5.*] ne' punti B, C: dico, che non avranno lo stesso centro.

S' è possibile sia E il loro centro: si unisca la EC, e si tiri comunque la EFG.

Ed essendo E centro del cerchio ABC, sarà la CE uguale alla EF. Similmente essendo E centro del cerchio CDG, la CE è uguale alla EG; e si è dimostrata la CE uguale alla EF; perciò sarà la EF uguale alla EG, la minore alla maggiore, che non può essere. Adunque il punto E non è centro de' cerchi ABC, CDG.

E perciò se due cerchi *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino fra loro di dentro, non avranno lo stesso centro.

I due cerchi ABC, CDE [*fig. 6.*] si tocchino fra loro di dentro in C: dico, che non avranno lo stesso centro.

S' è possibile, sia questo F; si unisca la FC, e tirisi comunque la FEB.

E poichè F è centro del cerchio ABC, la CF è uguale alla FB: inoltre essendo F centro del cerchio CDE, la CF è uguale alla FE. Ma si è dimostrata la CF uguale alla FB;

adunque la FE è uguale alla FB : la minore alla maggiore, ch'è impossibile. Quindi non è il punto F centro de' cerchi ABC, CDE.

E perciò se due cerchi *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se nel diametro del cerchio si prenda qualche punto, che non sia centro del cerchio, e da esso cadano nella circonferenza alcune linee rette; la massima sarà quella nella quale è il centro, e la rimanente sarà la minima : delle altre poi, la più vicina a quella, che passa per lo centro è sempre maggiore della più lontana; e solamente a due a due uguali ne cadranno dal medesimo punto nella circonferenza, dall' una, e l' altra parte della minima (V.N.).

Sia il cerchio ABCD [*fig. 7.*], il cui diametro AD, ed in essa AD si prenda un punto F, che non sia centro del cerchio; sia poi E il centro del cerchio; e dal punto F cadano nella circonferenza ABCD alcune linee rette FB, FC, FG : dico la FA esser la massima, la FD la minima; e delle altre, la FB maggiore della FC, la FC maggiore della FG.

Imperocchè congiungansi le BE, CE, GE.

E perchè due lati di ogni triangolo sono maggiori del rimanente (20.I.); saranno le BE, EF maggiori della BF : ma la AE è uguale alla EB; adunque le BE, EF sono uguali alla AF, e quindi la AF è maggiore della BF. Inoltre, poichè la BE è uguale alla EC, e la FE comune, le due BE, EF sono uguali alle due CE, EF : ma l' angolo BEF è maggio-

re dell'angolo CEF ; laonde la base BF è maggiore della base FC (24. I.) : per la stessa ragione anche la CF è maggiore della GF . Di nuovo , essendo le GF , FE maggiori della GE, e la GE uguale alla ED ; saranno le GF, FE maggiori della ED : tolta comune la EF , sarà la rimanente GF maggiore della rimanente FD . Quindi FA è la massima, ed FD la minima; e la BF è maggiore della FC , la FC maggiore della FG.

Dico inoltre, che dal punto F nella circonferenza ABCD, cadano rette uguali solamente a due a due , dall' una, e l' altra parte della minima FD.

Si costituisca alla linea retta EF , e nel punto E dato in essa l' angolo FEH uguale all' angolo GEF (23.I.) , e giungasi FH .

Ed essendo la GE uguale alla EH , e la EF comune ; le due GE , EF sono uguali alle due HE, EF, e l'angolo GEF è uguale all' angolo HEF ; adunque la base FG è uguale alla base FH (4.I.) . Or dico , che dal punto F non cada nella circonferenza altra linea retta uguale alla FG . Poichè se può succedere , cada la FK : ed essendo la FK uguale alla FG , e la FG uguale alla FH ; sarà la FK uguale alla FH , cioè la più vicina a quella , che passa per lo centro uguale alla più lontana : che non può essere .

Laonde se nel diametro del cerchio *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio prendasi qualche punto, e da questo alla circonferenza si tirino alcune linee rette, delle quali una passi per lo centro, e le altre comunque: di quelle, che cadono nella circonferenza concava, la massima è quella, che passa per lo centro; e delle altre la più vicina a quella, che passa per lo centro, è sempre maggiore della più lontana. Di quelle poi, che cadono nella circonferenza convessa, la minima è quella, che prolungata passerebbe per lo centro; e delle altre la più vicina alla minima è sempre minore della più lontana; e solamente a due a due uguali cadranno dal medesimo punto nella circonferenza, dall' una, e l' altra parte della minima.

Sia il cerchio ABC [*fig. 8.*], e fuori di esso prendasi qualche punto D, dal quale si tirino al cerchio le linee rette DA, DE, DF, DC, e sia la DA per lo centro: dico, che di quelle, che cadono nella circonferenza concava AEFE, la massima sia la DA, che passa per lo centro; e che la più vicina a questa DA sia sempre maggiore della più lontana, cioè la DE maggiore delle DF, la DF maggiore della DC. Delle altre poi che cadono nella circonferenza convessa HLKG, dico esser minima la DG, che prolungata passerebbe per lo centro, e che ogni altra più vicina alla minima DG sia minore della più lontana, cioè la DK minore della DL, la DL minore della DH.

Imperocchè si prenda il centro del cerchio ABC, che sia M, e giungansi le ME, MF, MC, MH, ML, MK.

E perchè la AM è nguale alla ME, aggiunta comune la MD; sarà la AD uguale alle EM, MD: ma le EM, MD sono maggiori della ED (20.I.); adunque anche la AD è maggiore della ED. Di nuovo, poichè la ME è uguale alla MF, pongasi comune la MD; saranno le EM, MD uguali alle MF, MD; è poi l'angolo EMD maggiore dell'angolo FMD; adunque la base ED sarà maggiore della base FD (24. I.). Dimostreremo similmente la FD esser maggiore della CD; quindi la DA è la massima, e la DE è maggiore della DF, la DF maggiore della DC.

Inoltre, essendo le MK, KD maggiori della MD, e la MG uguale alla MK; sarà la rimanente KD maggiore della rimanente GD; adunque la GD è minore della DK, e perciò GD è la minima. Or perchè dagli estremi del lato MD del triangolo MLD sono costituite ad un punto di dentro le dne linee rette MK, KD; queste saranno minori delle ML, LD (21. I.): ma la MK è ugnale alla ML; adunque la rimanente DK è minore della rimanente DL. Nel modo stesso si dimostrerà la DL minore della DH; adunque la DG è la minima, e la DK è minore della DL, la DL minore della DH.

Dico ancora, che solamente a dne a due uguali ne cadranno nella circonferenza, dall'una, e l'altra parte della minima.

Si costituisca alla linea retta MD, nel pnnto M dato in essa, l'angolo DMB uguale all'angolo DMK (23. I.), e giungasi DB. Ed essendo la MK uguale alla MB, e la MD comune, le due KM, MD sono uguali alle due BM, MD, l'una all'altra, e l'angolo KMD è uguale all'angolo BMD; adunque la base DK è uguale alla base DB (4. I.). Or dico, che dal punto D non possa cadere nella circonferenza altra linea retta uguale alla DK. Poichè se può essere, cada la DN: e perchè DK è nguale sì alla DN, che alla DB; sarà la DB u-

guale alla DN, cioè la più vicina alla minima sarebbe uguale alla più lontana ; che si è dimostrato impossibile .

Se dunque fuori del cerchio *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se dentro al cerchio si prenda qualche punto , e da esso cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali ; il punto preso sarà centro del cerchio. (*V.N.*)

Sia il cerchio ABC [*fig. 9.*] , e dentro di esso si prenda qualche punto D , dal quale cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali , come DA, DB, DC : dico essere il punto D centro del cerchio ABC.

Poichè , s' è possibile , tal centro non sia D , ma E , e congiunta DE si prolunghi fino a' punti F , G ; sarà FG un diametro del cerchio ABC. Ed essendosi in tal diametro preso un punto D , che non è centro del cerchio ; sarà DG la massima,e la DC maggiore della DB,la DB della DA (7.III): ma queste si pongono uguali, ch' è impossibile ; quindi non può essere E centro del cerchio ABC . Dimostreremo similmente , che non possa essere tal centro alcun altro punto diverso da D . Adunque D è centro del cerchio ABC.

E perciò se dentro al cerchio *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

La circonferenza di un cerchio non sega quella di un altro cerchio in più di due punti (*v.n.*).

Se può succedere, la circonferenza ABC [*fig.10.*] seghi l' altra DEF in più di due punti, vale a dire in B, G, F; e preso il centro K del cerchio ABC (1. III.), giungansi le KB, KG, KF.

Ed essendo preso dentro al cerchio DEF un punto K, dal quale cadono nella circonferenza DEF più di due linee rette uguali KB, KG, KF, il punto K sarà centro del cerchio DEF (9. III.): ma K è anche centro del cerchio ABC; quindi due cerchi, che s'intersegano avrebbero il centro stesso; che non può essere (5. III.)

E però la circonferenza di un cerchio ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino di dentro, e prendansi i loro centri; la linea retta, che unisce i centri prolungata passerà per lo contatto. (*v.n.*)

I due cerchi ABC, ADE [*fig.11.*] si tocchino di dentro in A, e prendasi il centro del cerchio ABC, che sia F, e del cerchio ADE il centro G: dico, che la linea retta tirata dal punto F all'altro G, prolungandosi, passerà per A.

Poichè, se può succedere, cada come la FGDH, e giungansi AF, AG.

Ed essendo le AG, GF maggiori della AF (20.I.), cioè della FH; togliendo comune la FG, sarà la rimanente AG maggiore della rimanente GH: ma la AG è uguale alla GD; adunque la GD è maggiore della GH; la minore della maggiore, ch' è impossibile. Quindi la linea retta tirata dal punto F all' altro G prolungata non cadrà fuori del contatto A, e però necessariamente vi dovrà passare.

Se dunque due cerchi *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta che unisce i loro centri passerà per lo contatto.

I due cerchi ABC, ADE [*fig. 12.*] si tocchino di fuosi in A, e si prenda il centro del cerchio ABC, che sia F, ed il centro G dell'altro cerchio ADE; dico, che la linea retta la quale congiugne i punti F, G passi per lo contatto A.

Non sia così: ma se può essere, cada come la FCDG, e giungansi le FA, AG.

Ed essendo F centro del cerchio ABC, sarà la AF uguale alla FC. Di nuovo, poichè G è centro del cerchio ADE, sarà la AG uguale alla GD: e si è dimostrata la AF uguale alla FC; adunque le FA, AG sono uguali alle FC, DG; e perciò tutta la FG è maggiore delle FA, AG: ma n'è minore, ch' è impossibile. Laonde la linea retta, che congiugne i punti F, G dovrà necessariamente passare per lo contatto A.

E perciò se due cerchi *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Il cerchio non tocca il cerchio in più di un punto, o che lo tocchi di dentro, o di fuori.

Se può succedere, il cerchio ABDC [*fig.13.n.1.*] tocchi il cerchio EBFD, primieramente di dentro, in più di un punto, cioè in B, D.

Si prenda il centro G del cerchio ABDC(1.II), e 'l centro H del cerchio EBFD; dovrà la linea retta, che si tira dal punto G all' H, passare pe' punti B, D (11.III.) : cada come la BGHD.

Ed essendo G centro del cerchio ABDC, sarà la BG uguale alla GD; quindi la BG è maggiore della HD; e perciò la BH è molto maggiore della HD. Di nuovo, perchè H è centro del cerchio EBFD, la BH è uguale alla HD: ma la BH si è dimostrata molto maggiore della HD, ch' è impossibile. Adunque il cerchio non tocca di dentro il cerchio in più di un punto.

Dico, che nè ciò possa avvenire toccandolo di fuori.

Poichè, s' è possibile, il cerchio AKC [*fig. 13. n. 2.*] tocchi il cerchio ABDC, di fuori, in più di un punto, cioè in A, C : giungasi AC.

Perchè dunque si sono presi nella circonferenza dell'uno, e l' altro cerchio ABC, AKC due punti qualunque A, C; la linea retta, che gli congiugne cadrà dentro l' uno, e l' altro (2.III.) : ma cade dentro al cerchio ABDC, e fuori del cerchio AKC; ch' è assurdo. Adunque il cerchio non tocca il cerchio di fuori, in più di un punto. Si è anche dimostrato, che ciò non possa avvenire toccandolo di dentro.

Laonde il cerchio non tocca ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro : e quelle , che sono ugualmente distanti dal centro , sono fra loro uguali .

Sia il cerchio ABDC [*fig. 14.*] , ed in esso le linee rette uguali AB , CD : dico esser queste ugualmente distanti dal centro.

Prendasi il centro del cerchio ABDC , che sia E , da esso tirinsi le EF , EG perpendicolari alle AB , CD , e giungansi AE , EC.

E poichè la linea retta EF tirata per lo centro sega ad angoli retti l' altra AB non tirata per lo centro , la segherà altresì per metà (3. III.) ; onde la AF è nguale alla FB , e però la AB è doppio della AF : per la ragione medesima la CD è doppia della CG. Ma la AB è uguale alla CD ; adunque la AF è uguale alla CG . Or essendo la AE uguale alla EC,sarà il quadrato di AE uguale a quello di EC: ma al quadrato di AE sono nguali i quadrati di AF,FE, perchè è retto l' angolo in F (47.I.) ; ed al qaadrato di EC sono parimente uguali i quadrati di EG , GC , per esser retto l' angolo in G; perciò i quadrati di AF , FE sono uguali a' quadrati di CG, GE : ed è il qnadrato di AF nguale a quello di CG , perchè la AF è uguale alla CG ; laonde il rimanente quadrato di FE è ugnale al rimanente quadrato di EG , e quindi la FE è uguale alla EG . Or le linee rette tirate nel cerchio diconsi essere ugualmente distanti dal centro , quando le perpendicolari tirate dal centro sopra esse sono uguali (*d.*4.III.) ; adunque le AB , CD sono ugualmente distanti dal centro.

Sieno ora le AB , CD ugualmente distanti dal centro , cioè la FE sia uguale alla EG : dico esser la AB uguale alla CD.

Imperocchè, fatta la stessa costruzione, dimostreremo similmente esser la AB doppia della AF, la CD della CG. Ed essendo la AE uguale alla EC, il quadrato di AE è uguale a quello di EC: ma al quadrato di AE sono uguali i quadrati di EF, FA, ed al quadrato di EC sono uguali i quadrati di EG, GC; adunque i quadrati di EF, FA sono uguali a' quadrati di EG, GC: perciò essendo il quadrato di EF uguale a quello di EG, perchè EF è uguale ad EG; sarà altresì il rimanente quadrato di AF uguale al rimanente quadrato di CG; e però la linea retta AF è uguale all'altra CG. Ed è la AB doppia della AF, e la CD della CG; laonde anche la AB sarà uguale alla CD.

Adunque nel cerchio *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Il diametro è la massima retta tirata nel cerchio; delle altre sempre la più vicina al centro è maggiore della più lontana; e quella, ch' è maggiore, sarà più vicina al centro, che la minore. (*V.N.*)

Sia il cerchio ABCD [*fig. 15.*], il cui diametro AD, ed il centro E; e più vicina al centro sia la BC, più lontana la FG: dico essere la AD la massima, e la BC maggiore della FG.

Si tirino dal centro le EH, EK perpendicolari alle BC, FG, e giungansi EB, EC, EF. Ed essendo la AE uguale alla EB, e la ED alla EC; sarà la AD uguale alle BE, EC: ma le BE, EC sono maggiori della BC (20. I.); quindi la AD sarà maggiore della BC.

Or essendo la BC più vicina al centro, da cui è più lontana la FG: sarà la EK maggiore della EH (*d.*5.III.): è

poi la BC doppia della BH , e la FG doppia della FK ; ed i quadrati di EH , HB sono uguali a' quadrati di EK, KF , de' qnali il quadrato di EH è minore di quello di EK, per essere EH minore di EK; quindi il rimanente quadrato di BH sarà maggiore del rimanente quadrato di FK ; che perciò la retta BH sarà maggiore della FK, e la BC maggiore della FG.

Sia ora la BC maggiore della FG ; dico , esser la BC più vicina al centro, che la FG, o sia , che la EH è minore della EK .

Perchè la BC è maggiore della FG , sarà anche la BH maggiore della FK : ma i quadrati di BH, HE sono uguali a' quadrati di FK , KE , e di essi il quadrato di BH è maggiore di quello di FK , perchè BH è maggiore di FK; quindi il rimanente quadrato di EH sarà minore del rimanente quadrato di EK ; e perciò la retta EH è minore della EK.

Laonde il diametro è la massima *ec.* — *C. B. C.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

La linea retta tirata perpendicolare al diametro del cerchio, dall' estremità di esso , cade fuori del cerchio ; e dalla stessa estremità non si può tirare altra linea retta fra la già tirata, e la circonferenza, o ch'è lo stesso , ogni linea retta, per quanto grande sia l' angolo acuto , ch' essa faccia col diametro nell' estremità sua , o per quanto piccolo sia quello, ch'essa faccia colla linea retta perpendicolare al diametro , dovrà segare il cerchio. (*V.N.*)

Sia il cerchio ABC [*fig. 16.*] intorno al centro D , ed al

diametro AB: dico, che la linea retta tirata dal punto A perpendicolare alla AB cada fuori del cerchio.

Poiche, s' è possibile, cada dentro, come la AC, e giungasi CD.

Ed essendo la DA uguale alla DC; sarà l'angolo DAC uguale all' altro DCA: ed è retto l' angolo DAC; quindi ancor l' angolo DCA sarà retto; onde i due angoli DAC, DCA sono uguali a due retti, ch'è impossibile (32. I.). Adunque la linea retta tirata perpendicolare alla BA dal punto A non cadrà dentro al cerchio. Dimostreremo similmente, che nè anche cada nella circonferenza; e però è necessario, che cada di fuori, come la AE.

Dico, che tra la linea retta AE, e la circonferenza non si può tirare, dallo stesso punto A, altra linea retta, che non seghi il cerchio.

Poichè, se può essere, se ne tiri un' altra, come la AF, e dal punto D tirisi ad essa la perpendicolare DG, che incontri la circonferenza in H. Ed essendo retto l'angolo AGD, l'altro DAG sarà minore del retto; e perciò la AD maggiore della DG (19.I.); ma la AD è uguale alla DH; adunque la DH è maggiore della DG; la minore della maggiore, ch' è impossibile. Perciò dallo stesso punto A non può condursi altra linea retta fra la AE, e la circonferenza, che non seghi il cerchio: o ch' è lo stesso, alcuna linea retta, per quanto sia grande l' angolo acuto, ch' essa comprenda col diametro nel punto A, o per quanto piccolo sia quello, ch'essa faccia con la AE, potrà passare fra questa AE, e la circonferenza, e non segare il cerchio. — *C.B.D.*

Cor. È manifesto da ciò, che la linea retta, che si tira perpendicolare al diametro del cerchio dall' estremità sua, tocca il cerchio: e che la linea retta tocca il cerchio in un punto solo; poichè quella, che lo incontra in due punti cade dentro di esso, come si è dimostrato (2. III.). (*r.n.*)

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

Da un punto dato nella circonferenza di un dato cerchio, o pur fuori di esso, tirare la linea retta, che tocchi il cerchio (*V. N.*)

Sia dato il cerchio BCD [*fig.17.*], » e primieramente nel-
» la sua circonferenza il punto D ; fa d' uopo tirare da tal
» punto la linea retta , che tocchi il cerchio.

» Si trovi il centro E del cerchio, e giungasi il raggio ED,
» al quale si tiri dal suo estremo D la perpendicolare DF ,
» sarà questa la tangente cercata (*c.*16.III.)

Che se il punto dato sia fuori del cerchio BCD, come A : si prenda similmente il centro E del cerchio, e giungasi AE ; poi dal centro E, con l' intervallo EA si descriva il cerchio AFG ; indi dal punto D tirisi la DF perpendicolare alla EA, e si giungano le EBF , AB : dico, che dal punto A siesi tirata la AB , che tocca il cerchio BCD.

Poichè E è centro de' cerchi BCD , AFG , sarà la EA uguale alla EF , e la ED alla EB. Quindi le due AE , EB sono uguali alle due FE , ED , contengono di più l' angolo comune E ; adunque la base DF è uguale alla base AB , il triangolo DEF è uguale al triangolo EBA , ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli (4.I.) ; perciò l' angolo EBA è uguale all' angolo EDF : ma l' angolo EDF è retto ; onde altresì retto è l' angolo EBA . Or EB è raggio , e la linea retta , che tirasi perpendicolare al diametro del cerchio dall' estremità sua , tocca il cerchio (*c.*16.III.) ; adunque la AB tocca il cerchio BCD.

E perciò da un punto dato nella circonferenza del cerchio BCD, o fuori di esso, si è tirata la tangente al cerchio. *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta tocchi il cerchio, e dal centro si tiri al contatto altra linea retta; questa sarà perpendicolare alla tangente.

La linea retta DE [*fig.18.*] tocchi il cerchio ABC nel punto C, e prendasi il centro F di questo cerchio, dal quale si tiri al punto C la FC: dico esser la FC perpendicolare alla DE.

Poichè, se non è così, dal punto F si tiri la FG perpendicolare alla DE. Ed essendo retto l'angolo FGC, sarà acuto l'altro GCF (17. I.); perciò l'angolo CGF è maggiore dell'altro FCG: ma il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore (19.I.); quindi la FC è maggiore della FG. È poi la FC uguale alla FB; adunque la FB è maggiore della FG; la minore della maggiore, ch'è impossibile. Perciò la FG non è perpendicolare alla DE. Dimostreremo similmente, che verun' altra lo sia, oltre la FC; adunque la FC è perpendicolare alla DE.

Laonde se una linea retta *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se una linea retta tocchi il cerchio, e dal contatto si tiri la linea retta perpendicolare alla tangente; in questa sarà il centro del cerchio.

La linea retta DE [*fig.19.*] tocchi in C il cerchio ABC,

e dal punto C si tiri alla DE la perpendicolare CA: dico essere il centro di quel cerchio in questa CA.

Non sia così; ma, se può essere, sia F tal centro, e giungasi CF.

E poichè la linea retta DE tocca il cerchio ABC, e dal contatto al centro si è tirata la FC, sarà la FC perpendicolare alla DE (18. III.); quindi l'angolo FCE è retto. Ma è anche retto l'altro ACE; perciò l'angolo FCE è uguale all'altro ACE, il minore al maggiore, ch'è impossibile. Non è dunque F centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che non lo sia verun altro punto, che non istia nella CA: adunque il centro è nella CA.

Perciò se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

L'angolo, ch' è al centro del cerchio, è doppio di quello, ch' è alla circonferenza, quando hanno per base lo stesso arco. (*V.N.*)

Sia il cerchio ABC [*fig.20.n.1, e 2.*], al cui centro E stia l'angolo BEC, e l'altro BAC alla circonferenza, ed essi abbiano per base lo stesso arco BC: dico esser l'angolo BEC il doppio dell'angolo BAC.

Congiungasi AE, e producasi in F: e questa primieramente divida l'angolo BEC [*fig.20.n.1.*].

Ed essendo la AE uguale alla EB, sarà l'angolo EAB uguale all'angolo EBA; e perciò gli angoli EAB, EBA sono il doppio dell'angolo EAB: ma l'angolo BEF è uguale agli angoli EAB, EBA (32.I.); adunque l'angolo BEF è il doppio dell'angolo EAB. Per la stessa ragione ancor l'angolo FEC è il doppio dell'angolo EAC; quindi tutto l'angolo BEC sarà il doppio di tutto l'altro BAC.

Che se la AEG [*fig.20.n.2.*] non divida l'angolo BEC : ma cada fuori di esso .

Dimostreremo similmente esser l' angolo GEC il doppio dell' altro EAC, de' quali GEB è il doppio di EAB ; adunque il rimanente BEC sarà anche il doppio del rimanente BAC.

E perciò l' angolo al centro del cerchio *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Gli angoli, che sono nello stesso segmento di cerchio , sono fra loro uguali *(v.n.)*.

Sia il cerchio ABCDE [*fig. 21. n.1. e 2.*] , e nello stesso segmento BAED sieno gli angoli BAD , BED : dico esser questi fra loro uguali.

Si prenda il centro del cerchio ABCDE , che sia F ; e se il segmento BAED [*fig. 21. n. 1.*] è maggiore del semicerchio , giungansi le BF , FD ,

Ed essendo l' angolo BFD , al centro , e l' altro BAD alla circonferenza , ed avendo per base lo stesso arco BCD ; sarà l'angolo BFD il doppio dell' angolo BAD (30.III.). Per la stessa ragione l'angolo BFD è il doppio dell'angolo BED; quindi l' angolo BAD sarà uguale all' altro BED.

Che se poi il segmento BAED[*fig.21.n.2.*] nel quale sono gli angoli BAD, BED, non è maggiore del semicerchio, si tiri la AF al centro F, e prolungatala in C, giungasi EC.

Sarà il segmento BAEC maggiore del semicerchio ; e perciò saranno uguali gli angoli BAC , BEC , che sono in esso. Per la stessa ragione sono ancora uguali gli angoli CAD , CED , che sono nel segmento DABC maggiore del semicerchio ; onde tutto l'angolo BAD è uguale a tutto l'altro BED :

Quindi gli angoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Gli angoli opposti de' quadrilateri, che descrivonsi ne' cerchi, sono uguali a due retti. *(V.N.)*

Sia il cerchio ABCD [*fig.* 22.], ed in esso il quadrilatero ABCD: dico gli angoli opposti di questo essere uguali a due retti.

Giungansi AC, BD.

E poichè l'angolo CAB è uguale all' angolo BDC, essendo essi nello stesso segmento BADC (21. III.), e l'angolo ACB è nguale all' altro ADB, per essere nel medesimo segmento ADCB; perciò tutto l'angolo ADC è uguale agli angoli BAC, ACB: aggiunto comune l'angolo ABC; saranno gli angoli ABC, BAC, ACB uguali agli angoli ABC, ADC. Ma gli angoli ABC, BAC, ACB sono uguali a due retti (32. I.); perciò anche gli angoli ABC, ADC saranno uguali a due retti. Dimostreremo similmente, che sieno uguali a due retti gli angoli BAD, DCB.

Adunque gli angoli opposti cc. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Nella medesima linea retta, dalla parte stessa, non si costituiranno due segmenti di cerchio simili, e che non coincidano (*V.N.*)

Se può avvenire, nella medesima linea retta AB [*fig.23.*] si costituiscano, dalla parte stessa, i due segmenti di cerchio ACB, ADB simili, e che non coincidano.

E poichè la circonferenza ACB incontra l'altra ADB ne'due punti A, B, non potrà l' una incontrar l' altra in altro punto (10. III.); che perciò dovrà l' un di essi segmenti comprendere l' altro: sia ACB compreso nell' altro ADB; si tiri la linea retta ACD, e giungansi le CB, BD. Ed essendo il segmento ACB simile all' altro ADB, e segmenti simili di cerchio essendo quelli,che contengono angoli uguali (*d.* 11. III.); sarà l' angolo ACB uguale all' altro ADB: l' esteriore all' interiore ed opposto, che non può essere (16.I.).

E perciò nella medesima linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

I segmenti simili di cerchio costituiti nelle linee rette uguali, sono fra loro uguali. (*V.N.*)

Sieno costituiti nelle uguali linee rette AB, CD [*fig.24.*] i segmenti simili di cerchio AEB, CFD: dico il segmento AEB essere uguale all' altro CFD.

Imperocchè se intendasi applicato il segmento AEB al-

l' altro CFD, e posto il punto A sul punto D, e la linea retta AB sulla CD; dovrà cadere anche il punto B in C, perchè la AB è uguale alla CD; ed adattandosi la linea retta AB all' altra CD, il segmento AEB dovrà coincidere coll' altro CFD (23.III.); e per conseguenza gli sarà uguale.

Quindi i segmenti simili di cerchio *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Dato un segmento di cerchio, descrivere il cerchio di cui esso è segmento. (*V.N.*)

* Sia dato il segmento di cerchio ABC [*fig.25.n.1,2,e 3*]; fa d' uopo descrivere il cerchio di cui ABC è segmento.

Si divida la AC per metà in D (10.I.), dal punto D si tiri la DB perpendicolare alla AC, e giungasi la AB, risulterà l' angolo ABD o uguale all' altro BAD, oppure ineguale.

Sia primieramente l' angolo ABD [*fig.25. n.1.*] uguale all' angolo BAD, sarà altresì la AD uguale alla BD (6.I.), e quindi alla DC; per lo che essendo fra loro uguali le tre linee rette AD,DB,DC, sarà D centro del cerchio (9.III.); e quindi se centro D, intervallo DA,DB, ovvero DC si descriva il cerchio, questo passerà anche per gli altri punti, e si sarà descritto il cerchio di cui ABC è segmento. E.perchè il centro D è nella AC, il segmento ABC sarà semicerchio.

Che se poi gli angoli ABD, BAD [*fig.25.n.2, e 3.*] sieno disuguali: si costituisca alla linea retta AB, nel punto A in essa l' angolo BAE uguale all' altro ABD (23. I.), indi si prolunghi, se bisogna, la BD in E, e giungasi EC.

Ed essendo l' angolo ABE uguale all' angolo BAE, la linea retta BE sarà uguale all' altra EA (6. I.). Or la AD è uguale alla DC, e la DE è comune; quindi le due AD, DE

sono uguali alle due CD , DE , l' una all' altra , e l' angolo ADE è uguale all' angolo CDE, poichè l'uno, e l'altro è retto ; adunque la base AE è uguale alla base EC (4.I.) : ma si è anche dimostrata la AE uguale alla EB ; perciò le tre linee rette AE , EB , EC sono uguali fra loro ; e quindi E è centro del cerchio . Laonde se descrivasi il cerchio dal centro E , con l' intervallo uguale ad una delle AE, EB, EC, tal cerchio passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà quello che cercasi . Ed è manifesto , che se l' angolo ABD [*fig.25.n.2.*] sia maggiore dell' angolo BAD , il centro E debba cadere fuori del segmento ABC , il quale sarà perciò minore del semicerchio; che se poi l'angolo ABD [*f.25.n.3.*] sia minore dell' altro BAD , il centro E cadrà dentro del segmento ABC , il quale sarà perciò maggiore del semicerchio .

Adunque dato un segmento di cerchio , si è descritto il cerchio di cui esso è segmento. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli uguali insistono sopra archi uguali , o che stieno a'centri , o pure alle circonferenze .

Sieno i cerchi uguali ABC , DEF [*fig. 26.*] , ed in essi gli angoli uguali BGC, EHF , a' centri, gli altri BAC , EDF alle circonferenze : dico , che l' arco BKC sia uguale all' altro ELF .

Giungansi BC , EF.

Ed essendo uguali i cerchi ABC , DEF , saranno altresì uguali i loro raggi (*d.* 1. III.) : quindi le due BG , GC sono uguali alle due EH , HF , è pure l' angolo G uguale

all' angolo H ; adunque la base BC è uguale alla base EF (4. I.) . Or essendo l' angolo in A uguale all' angolo in D, il segmento BAC sarà simile al segmento EDF (*d.*11.III.). Ma sono anche costituiti nelle linee rette uguali BC , EF , ed i segmenti simili di cerchio costituiti nelle uguali linee rette sono uguali (24. III.) ; perciò il segmento BAG è uguale al segmento EDF . Per la qual cosa essendo tutto il circolo ABC uguale a tutto il circolo DEF , anche il rimanente segmento BKC dovrà essere uguale al rimanente ELF; è perciò l' arco BKC sarà uguale all' arco ELF .

Adunque ne' cerchi uguali *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli, che insistono sopra archi uguali,sono fra loro uguali,o che stieno a' centri, ovvero alle circonferenze.

Ne' cerchi uguali ABC , DEF [*fig.27.*] , sopra gli uguali archi BC , EF insistano gli angoli BGC , EHF ai centri , e gli altri BAC, EDF alle circonferenze : dico esser l'angolo BGC uguale all'angolo EHF,e l' angolo BAC all'angolo EDF.

Primieramente è chiaro , che se l' angolo BGC sia uguale all' angolo EHF , anche l' angolo BAC dovrà essere uguale all' angolo EDF (20.III.) Se dunque non è così l' un di que' primi angoli è maggiore: sia BGC maggiore, e si costituisca alla linea retta BG , nel punto G in essa , l' angolo BGK uguale all' angolo EHF (23. I.) . E poichè gli angoli uguali posti a' centri di uguali cerchi insistono sopra archi uguali (26. III.) ; dovrà essere l'arco BK uguale all' altro EF : ma l' arco EF è uguale all' arco BC ; quindi anche BK sarà uguale a BC ; il minore al maggiore , ch' è impossibile. Non

è dunque l' angolo BGC disuguale all' angolo EHF ; e perciò gli è uguale : è poi l' angolo A metà dell' angolo BGC, e dell' angolo EHF n' è metà l' angolo D ; quindi l' angolo A è uguale all' altro D.

Laonde ne' cerchi uguali *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, le linee rette uguali tagliano archi uguali, il maggiore al maggiore, e 'l minore al minore.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.28.*], ed in essi le linee rette uguali BC, EF, le quali taglino gli archi maggiori BAC, EDF, ed i minori BGC, EHF : dico esser l'arco maggiore BAC uguale al maggiore EDF, ed il minore BGC al minore EHF.

Si prendano i centri K, L di que' cerchi (1. III.), e giungansi BK, KC, EL, LF.

Ed essendo uguali i cerchi, saranno altresì uguali i loro raggi (*d.* 1. III.); perciò le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF : è pure la base BC uguale alla base EF; quindi l' angolo BKC è uguale all' angolo ELF. Per la qual cosa dovendo gli angoli uguali, posti a' centri, insistere sopra archi uguali (26. III.) ; sarà l'arco BGC uguale all' arco EHF. E poichè tutta la circonferenza ABC è uguale a tutta l' altra DEF ; dovrà il rimanente arco BAC essere uguale al rimanente EDF.

Adunque ne' cerchi uguali *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali gli archi uguali sono sottesi da linee rette uguali.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.29.*], e presi in essi gli archi uguali BGC, EHF, giungansi le BC, EF: dico la linea retta BC essere uguale all' altra EF.

Si prendano i centri K, L de' cerchi (1.III.), e giungansi BK, KC, EL, LF.

Ed essendo l' arco BGC uguale all' arco EHF, sarà l' angolo BKC uguale all' angolo ELF (27. III.): ma sono uguali i cerchi ABC, DEF, e perciò i loro raggi sono anche uguali (*d.*1.III.); quindi le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF, e contengono uguali angoli; sarà dunque la base BC uguale alla base EF (4. I.).

E perciò ne' cerchi uguali ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Dato un arco di cerchio dividerlo per metà.

Sia dato l' arco di cerchio ADB [*fig.30*]. ; fa d' uopo dividerlo per metà.

Si giunga AB, e dividasi per metà in C (10.I.), indi dal punto C si tiri la CD perpendicolare alla AB, e giungansi AD, DB.

E poichè la AC è uguale alla CB, e la CD è comune, le due AC, CD sono uguali alle due BC, CD, l' una all'altra; è pure l' angolo ACD uguale all' angolo BCD, essendo l' u-

no, e l' altro retto ; adunque la base AD è uguale alla base BD . Or le linee rette uguali tagliano archi uguali , il maggiore al maggiore , ed il minore al minore (28.III.) ; ed è l' uno , e l' altro degli archi AD , DB minore della semicirconferenza , mentre la DC passa per lo centro : quindi l'arco AD sarà uguale all' arco DB.

E perciò dato un arco di cerchio si è diviso per metà. *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Nel cerchio , l' angolo nel semicerchio è retto ; quello nel segmento maggiore del semicerchio è minore del retto ; e l'altro nel segmento minore del semicerchio è maggiore del retto. (*v.n.*)

Sia il cerchio ABCD [*fig. 31.*] , e BC un diametro di esso , E il centro ; e tirata la CA , che divida il cerchio ne' segmenti ABC , ADC , giungansi BA , AD , DC : dico esser retto l' angolo BAC, ch' è nel semicerchio ; e quello nel segmento ABC maggiore del semicerchio esser minore del retto ; e maggiore del retto l' altro nel segmento ADC minore del semicerchio .

Giungasi AE , e si prolunghi la BA in F.

Ed essendo la BE uguale alla EA ; sarà l' angolo EAB uguale all' angolo EBA (5.I.) . Similmente perchè la AE è uguale alla EC , sarà l' angolo EAC uguale all'angolo ECA ; quindi tutto l'angolo BAC è uguale a' due angoli ABC,ACB. Ma è pur l' angolo FAC esteriore del triangolo ABC uguale a' due ABC , BCA (32. I.) ; adunque l' angolo BAC è uguale all' angolo FAC , e perciò ciascun di essi è retto . Laonde l' angolo BAC nel semicerchio CAB è retto.

E perchè i due angoli ABC , BAC del triangolo ABC sono minori di due retti (17. I.) , e l' angolo BAC è retto ; perciò l' altro angolo ABC sarà minore del retto : ed è nel segmento ABC maggiore del semicerchio.

Or il quadrilatero ABCD essendo descritto nel cerchio ; ed i quadrilateri descritti ne' cerchi avendo gli angoli opposti uguali a due retti (22. III.) ; saranno gli angoli ABC, ADC uguali a due retti. Ma l' angolo ABC è minore del retto ; adunque il rimanente ADC sarà maggiore del retto ; ed è nel segmento ADC minore del semicerchio.

E perciò nel cerchio *ec.* — *C. B. D.*

È poi evidente , che la circonferenza del maggior segmento ABC cada fuori dell' angolo retto CAB, e che la circonferenza del minor segmento ADC cada nell' angolo retto CAF .

Cor. Di qui è manifesto , che se un angolo del triangolo sia uguale agli altri due , tal angolo sarà retto : perciocchè il suo adjacente è uguale agli stessi due ; è quando gli angoli adjacenti sono uguali , è necessario , che sieno retti.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se una linea retta tocchi il cerchio , e dal contatto si tiri altra linea retta, che lo seghi ; gli angoli , che questa fa colla tangente, saranno uguali a quelli, che si costituiscono ne' segmenti alterni del cerchio.

La linea retta EF (*fig. 32.*) tocchi il cerchio ABCD in B , e dal punto B si tiri nel cerchio ABCD l'altra linea retta BD , che lo seghi: dico gli angoli, che fa questa BD colla tangente EF , essere uguali a quelli costituiti ne' segmenti

alterni del cerchio, vale a dire, che l' angolo FBD sia uguale all' angolo DAB costituito nel segmento DAB, e l' angolo EBD all' altro DCB costituito nel segmento DCB.

Si tiri pel punto B la BA perpendicolare alla FE, e preso nell' arco BD qualsivoglia punto C, giungansi AD, DC, CB.

E poichè la linea retta EF tocca il cerchio ABCD nel punto B, e dal contatto B si è tirata la BA perpendicolare ad essa tangente, il centro del cerchio dovrà essere nella BA (19. III.); onde la BA è diametro di tal cerchio, e l' angolo ADB nel semicerchio è retto (31. III.); e perciò i rimanenti angoli BAD, ABD del triangolo BAD sono uguali ad un retto (32. I.). Ma è pure retto l' angolo ABF; adunque l' angolo ABF è uguale agli angoli BAD, ABD: tolgasi comune l' angolo ABD, e sarà il rimanente angolo DBF uguale all' angolo BAD, ch' è costituito nel segmento alterno del cerchio. Or perchè il quadrilatero ABCD è iscritto nel cerchio, i suoi angoli opposti sono uguali a due retti (22. III.); e perciò gli angoli opposti BCD, BAD sono uguali agli angoli DBF, DBE (13. I.); de' quali BAD si è dimostrato uguale a DBF; quindi il rimanente DBE sarà uguale all' angolo DCB, ch' è costituito nel segmento alterno del cerchio.

Se dunque una linea retta tocchi il cerchio *ec.*— *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA.

Sopra una data linea retta descrivere il segmento di cerchio, che contenga l' angolo uguale all' angolo rettilineo dato. (*V.N.*)

Sia la data linea retta AB [*fig. 33. n. 1*, 2, e *3.*], ed il

dato angolo rettilineo C : fa d' uopo descrivere sulla data linea retta il segmento di cerchio, che contenga l' angolo uguale all' angolo C.

Se l' angolo C [*fig. 33. n.1.*] è retto, si divida la AB per meta in F, e dal centro F, con l' intervallo FA, o FB si descriva il semicerchio AHB ; sarà l' angolo AHB uguale all' angolo retto C (31. III.).

Che se poi l' angolo C [*fig. 33. n.2, e 3.*] non è retto ; si costituisca alla linea retta AB, nel punto A in essa l' angolo BAD uguale all' angolo C (23.I.), e si tiri dal punto A la AE perpendicolare alla linea retta AD ; indi dividasi la AB per metà in F, e dal punto F si tiri la FG perpendicolare alla AB, e giungasi GB.

Essendo la AF uguale alla FB, e la FG comune, le due AF, FG sono uguali alle due BF, FG : è pure l'angolo AFG uguale all' angolo BFG ; perciò la base AG è uguale alla base GB. Per la qual cosa il cerchio descritto dal centro G, con l'intervallo GA, passerà anche per B: si descriva, e sia AEB. Or poichè dall' estremo A del diametro AE gli si è tirata la perpendicolare AD ; questa dovrà toccare il cerchio AEB (16. III.): ma si è dal contatto A tirata l' altra linea retta AB, che lo sega ; quindi l' angolo BAD è uguale a quello che si costituisce nel segmento AEB alterno del cerchio (32. III.) ; e perciò essendo l' angolo BAD uguale all' angolo C, sarà l'angolo C uguale all' angolo AEB.

Adunque sopra la data linea retta AB si è descritto il segmento di cerchio AHB, il quale contiene l' angolo uguale al dato C. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA.

Tagliare da un cerchio dato un segmento, che contenga l' angolo uguale ad un dato angolo rettilineo.

Sia dato il cerchio ABC [*fig.34.*], e l' angolo rettilineo D; fa d' uopo tagliare dal cerchio ABC un segmento, che comprenda l' angolo nguale al dato D.

Si tiri la linea retta EF, la quale tocchi il cerchio ABC nel punto B (17.III.); e poi si costituisca alla linea retta BF, nel punto B in essa, l' angolo FBC uguale all'angolo D (23.I.).

E poichè la linea retta EF tocca il cerchio ABC nel punto B, e dal contatto B si è tirata la BC; sarà l' angolo FBC uguale a qnello, che si costituisce nel segmento alterno del cerchio (33.III.). Ma l'angolo FBC è uguale all' angolo D; adunque anche l' angolo, ch' è nel segmento BAC sarà uguale all' angolo D.

E perciò dal dato cerchio ABC si è tagliato il segmento BAC, che contiene l' angolo ugnale al dato angolo rettilineo D. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

Se nel cerchio due linee rette seghinsi scambievolmente; il rettangolo contenuto da' segmenti di una è uguale a quello che, si contiene da' segmenti dell' altra. (*V.N.*)

Seghinsi scambievolmente nel cerchio ABCD [*fig.35.n.1. e 4.*] le due linee rette AC , BD nel punto E : dico il rettangolo contenuto dalle AE,EC essere uguale a quello, che si contiene dalle DE , EB.

Poichè se le AC, BD [*fig.35.n.1.*] passino per lo centro E , è evidente, che essendo uguali le AE , EC , DE , EB ; il rettangolo contenuto dalle AE,EC sia uguale a quello, che si contiene dalle DE , EB .

Passi adesso una delle linee rette BD [*fig.35. n. 2.*] per lo centro , e seghi ad angoli retti in E l' altra AC , che non passa per lo centro . Si divida per metà la BD in F , sarà F il centro del cerchio ABCD : si giunga AF.

E poichè la linea retta BD tirata per lo centro sega ad angoli retti l' altra retta linea AC, non tirata per lo centro, sarà la AE uguale alla EC (3. III.) . Or essendo la linea retta BD divisa in parti uguali nel punto F , ed in parti disuguali nel punto E; il rettangolo di BE,ED, insieme col quadrato di EF, è uguale al quadrato di FB , ovvero di FA (5.II.). Ma al quadrato di FA sono pure uguali i quadrati di AE , EF (47.I.) ; perciò il rettangolo di BE,ED, insieme col quadrato di EF, è uguale a' quadrati di AE , EF : si tolga il comune quadrato di EF , e sarà il rimanente rettangolo di BE , ED uguale al rimanente quadrato di AE , cioè al rettangolo di AE , EC .

Che se la BD tirata per lo centro [*fig. 35. n. 3.*] , non seghi ad angoli retti l' altra AC non tirata per lo centro, nel punto E ; si divida puranche la BD per metà in F ; sarà F il centro del cerchio : indi giungasi AF , e dal centro F si tiri alla AC la perpendicolare FG (12.I.); sarà la AG uguale alla GC , e perciò il rettangolo di AE, EC, una col quadrato di EG , è uguale al quadrato di AG (5.II.). Laonde se aggiungasi comune il quadrato di GF ; sarà il rettangolo di AE, EC, una co' quadrati di EG, GF, uguale a' quadrati di AG , GF. Ma a' quadrati di EG , GF è uguale il quadrato

di EF, ed a' quadrati di AG,GF è uguale il quadrato di AF; quindi il rettangolo di AE,EC, una col quadrato di EF, è uguale al quadrato di AF: è pure il rettangolo di DE, EB, una col quadrato di FE, uguale al quadrato di FB (5.II.); perciò il rettangolo di AE, EC, una col quadrato di FE, è uguale al rettangolo di DE, EB, una col quadrato di FE. Laonde tolto il comune quadrato di FE; sarà il rimanente rettangolo di AE, EC uguale al rimanente rettangolo di DE, EB.

Finalmente nè l'una, nè l'altra delle AC, BD [*fig.35.n.4*], passi per lo centro F del cerchio ABCD. Si tiri per lo punto E, ove s'intersegano quelle linee rette, il diametro GEFH. Ed essendosi il rettangolo di AE, EC poc'anzi dimostrato uguale all'altro di GE, EH, e che a questo stesso rettangolo di GE, EH è altresì uguale quello di BE, ED; sarà il rettangolo di AE, EC uguale a quello di BE, ED.

Quindi se nel cerchio due linee rette *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio prendasi qualche punto, e da questo cadano nel cerchio due linee rette, delle quali l'una seghi il cerchio, l'altra lo tocchi; il rettangolo contenuto da tutta la segante, e dal segmento esteriore, ch'è fra il punto, e la circonferenza convessa, sarà uguale al quadrato della tangente.

Fuori dal cerchio ABC [*fig.36. n.1. e 2.*] si prenda qualche punto D, dal quale cadano nel cerchio le due linee rette DCA, DB, delle quali la DCA seghi il cerchio ABC, la DB lo tocchi: dico il rettangolo di AD, DC essere uguale al quadrato di DB.

Imperocchè la linea retta DCA o passa per lo centro, o non passa. Passi primieramente per lo centro E del cerchio ABC [*fig.36.n.1.*], e giungasi EB : sarà retto l'angolo EBD (18.III.); e perciò la linea retta AC trovandosi divisa per metà, ed aggiunta per dritto ad essa la CD; il rettangolo di AD,DC, una col quadrato di EC, sarà uguale al quadrato di ED (6.II.). Ma la CE è uguale alla EB; adunque il rettangolo di AD, DC una col quadrato di EB è uguale al quadrato di ED. Or il quadrato di ED è uguale a' quadrati di EB,BD, perchè è retto l'angolo EBD(47.I.); quindi il rettangolo di AD,DC, una col quadrato di EB, è uguale a' quadrati di EB, BD : tolto il comune quadrato di EB; sarà il rimanente rettangolo di AD, DC uguale al quadrato della tangente DB.

Or non passi la segante DCA [*fig.36. n.2.*] per lo centro del cerchio ABC : si prenda il centro E, da E si tiri alla AC la perpendicolare EF (12. I.), e giungansi EB, EC, ED; che però è retto l'angolo EFD. E poichè la linea retta EF, tirata per lo centro, sega la linea retta AC, non tirata per lo centro, ad angoli retti, la dividerà per metà (3. III.); ed è perciò la AF uguale alla FC. Inoltre poichè la linea retta AC è divisa in parti uguali in F, e le sta per diritto la CD; il rettangolo di AD,DC, insieme col quadrato di FC, sarà uguale al quadrato di FD (6.II.) : si aggiunga comune il quadrato di FE; sarà il rettangolo di AD, DC, insieme co' quadrati di CF, FE, uguale ai quadrati di DF, FE. Ma a' quadrati di DF, FE è uguale il quadrato di DE; perchè è retto l'angolo EFD (47.I.), ed a' quadrati di CF, FE è uguale il quadrato di CE: perciò il rettangolo di AD,DC, una col quadrato di CE, è uguale al quadrato di ED. Ma sono anche i quadrati di BE, BD uguali al quadrato di ED, per esser retto l'angolo EBD (47.I.); adunque il rettangolo di AD, DC, una col quadrato di EB, è uguale a' quadrati di EB, BD : tolgasi comune il quadrato

di EB ; e sarà il rimanente rettangolo di AD , DC uguale al quadrato di BD.

Laonde se fuori del cerchio *cc.*— *C.B.D.*

Cor. Quindi se da un punto fuori del cerchio si tirino due linee rette, che lo seghino, come le DA, DG [*fig.36.n.2.*] ; i rettangoli contenuti dalle intere seganti , e dalle loro parti corrispondenti fuori del cerchio , saranno uguali fra loro : cioè il rettangolo di AD , DC sarà uguale al rettangolo di GD, DH . Perchè ciascuno di essi è uguale allo stesso quadrato della retta DB , che tocca il cerchio. (*V.N.*)

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio si prenda un qualche punto , e da questo cadano nel cerchio due linee rette , delle quali una lo seghi , l' altra l' incontri , e 'l rettangolo contenuto da tutta la segante , e dalla parte sua esteriore , ch' è fra il punto , e la circonferenza convessa , sia uguale al quadrato dell' incidente; questa incidente toccherà il cerchio.(*V.N.*)

Fuori del cerchio ABC [*fig. 37.*] si prenda un qualche punto D , e da esso cadano nel cerchio ABC le due linee rette DCA , DB , e la DCA sia una segante del cerchio , la DB poi lo incontri , ed il rettangolo di AD , DC sia uguale al quadrato di DB : dico che questa DB tocchi il cerchio ABC .

Si tiri la retta DE , che tocchi il cerchio ACB (17. III.) ; poi si prenda il centro di questo cerchio ACB, che sia F, e giungansi le FE,FB,FD ; sarà retto l' angolo FED (18. III).

E perchè la DE tocca il cerchio ABC, e la DCA lo sega ; sarà il rettangolo di AD , DC uguale al quadrato di DE

(36.III.) . Ma il rettangolo di AD , DC si suppone uguale al quadrato di DB ; adunque il quadrato di DE sarà uguale al quadrato di DB , e perciò la linea retta DE sarà uguale all' altra DB . Ed è pure la FE uguale alla FB : laonde le due DE , EF sono uguali alle due DB, BF , e la base FD è comune ; quindi l' angolo DEF è uguale all'angolo DBF. Ma l'angolo DEF è retto ; adunque anche l'altro DBF sarà retto. È poi la BF prolungata un diametro, e la linea retta , che si tira perpendicolare al diametro del cerchio, nell'estremità di esso , tocca il cerchio (16. III.) ; che però la DB tocca il cerchio ABC.

E perciò se fuori del cerchio *ec.* — *C. B. D.*

Fine del terzo libro.

IL QUARTO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. Una figura rettilinea si dice esser *iscritta* in un' altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura iscritta tocca ciascun lato di quella nella quale è iscritta.

N.B. La frase *angolo, che tocca una linea*, o pure *linea, che tocca un angolo*, si usa da' geometri per dinotare, che tal linea passa pel vertice dell' angolo, senza dividerlo.

II. Similmente una figura rettilinea si dice esser *circoscritta* ad un'altra, allorchè ciascun lato della circoscritta tocca ciascun angolo della figura alla quale è circoscritta.

III. Una figura rettilinea si dice esser *iscritta* nel cerchio, quando ciascun angolo della figura rettilinea tocca la circonferenza del cerchio.

IV. Una figura rettilinea si dice esser *circoscritta* al cerchio, quando ciascun lato della figura rettilinea circoscritta tocca la circonferenza del cerchio.

V. Il cerchio similmente si dice esser *iscritto* in una figura rettilinea, quando ciascun lato di questa tocca la circonferenza del cerchio, che in essa s' iscrive.

VI. Il cerchio si dice esser *circoscritto* ad una figura rettilinea, allorchè la circonferenza del cerchio tocca ciascun angolo della figura rettilinea, cui esso circoscrivesi.

VII. Una linea retta si dice *adattarsi* nel cerchio, quando le sue estremità sieno nella circonferenza del cerchio.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Nel dato cerchio adattare una linea retta uguale ad un' altra retta linea data, che non sia maggiore del diametro di esso.

Sia dato il cerchio ABC [*fig.1.*] , e data la linea retta D, non maggiore del diametro del cerchio : fa d' uopo adattare nel cerchio ABC una linea retta uguale all' altra D.

Si tiri il diametro CB del cerchio ABC; e se BC sia uguale a D , sarà fatto ciò che proponevasi : poichè nel cerchio ABC si sarà adattata la linea retta BC uguale all' altra D. Se poi non è uguale , la BC sarà maggiore della D ; che però pongasi la CE ugnale alla D (3.I.) , e dal centro C , con l' intervallo CE , si descriva il cerchio AEF, e giungasi CA . Ed essendo il punto C centro del cerchio AEF , sarà la CA uguale alla CE : ma la D è pure uguale alla CE ; quindi sarà la D uguale alla AC.

Adunque nel dato cerchio ABC si è adattata la linea retta AC uguale alla data D , non maggiore del diametro del cerchio — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

Nel dato cerchio iscrivere un triangolo equiangolo ad altro triangolo dato .

Sia ABC [*fig. 2.*] il dato cerchio , e DEF il triangolo dato : fa d' uopo iscrivere nel cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Tirisi la linea retta GAH, che tocchi il cerchio ABC nel punto A (17.III.), ed alla linea retta AH, nel punto A in essa, si costituisca l'angolo HAC uguale all' angolo DEF (23.I.) ; poi alla linea retta AG, nel punto A in essa, si costituisca l' angolo GAB uguale all' angolo DFE, e giungasi BC.

Perchè dunque la linea retta GAH tocca il cerchio ABC, e dal punto del contatto si è tirata la AC, sarà l'angolo HAC uguale all' angolo ABC, ch' è costituito nel segmento alterno del cerchio (32.III.) : ma l' angolo HAC è uguale all' angolo DEF ; adunque anche l' angolo ABC è uguale all' angolo DEF. Per la stessa ragione è pure l' angolo ACB uguale all'angolo DFE ; quindi il rimanente angolo BAC sarà uguale al rimanente EDF (32. I.) : perciò il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF, ed è iscritto nel cerchio ABC.

Adunque nel dato cerchio si è iscritto un triangolo equiangolo ad altro triangolo dato. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Circoscrivere al cerchio dato un triangolo equiangolo ad altro triangolo dato.

Sia ABC [*fig. 3.*] il dato cerchio, e DEF il dato triangolo : fa d' uopo circoscrivere al cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Si prolunghi la EF da ambe le parti ne' punti G, H, e preso il centro K del cerchio ABC, tirisi comunque la linea retta KB, e nel punto K della linea retta KB si costituisca l' angolo BKA uguale all' angolo DEG (23. I.), e l' angolo BKC uguale all' angolo DFH : di poi per gli pun-

ti A, B, C si tirino le linee rette LAM, MBN, NCL, che tocchino il cerchio ABC (17.III.). E perchè le LM, MN, NL toccano il cerchio ABC ne' punti A, B, C, e dal centro K si sono tirate a questi punti A, B, C le linee rette KA, KB, KC; saranno retti gli angoli in A, B, C (18.III): che però congiungendo la BA, gli angoli MAB, MBA risulteranno minori di due retti; onde le linee rette AM,BM dovranno incontrarsi (*post.* 5.). E similmente si dimostrerà, che debbansi incontrare tra loro le BN, CN, come pure le CL, AL. Ed essendo i quattro angoli del quadrilatero AMBK uguali a quattro retti, dividendosi esso in due triangoli, e gli angoli KAM, KBM sono retti; perciò i rimanenti angoli AKB, AMB saranno uguali a due retti: sono pure gli angoli DEG,DEF uguali a due retti (13.I.); quindi gli angoli AKB, AMB sono uguali agli angoli DEG, DEF, de' quali AKB è uguale a DEG; adunque il rimanente AMB sarà uguale al rimanente DEF. Dimostreremo in simil modo, che l'angolo LNM sia uguale all' altro DFE; perciò il rimanente MLN è uguale al rimanente EBF (32.I). Laonde il triangolo LMN è equiangolo al triangolo DEF; ed è poi circoscritto al cerchio ABC.

Quindi al dato cerchio si è circoscritto un triangolo equiangolo ad altro triangolo dato. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

Nel dato triangolo iscrivere il cerchio. (*V. N.*)

Sia dato il triangolo ABC [*fig.4.*]: fa d'uopo iscrivere il cerchio nel triangolo ABC.

Si dividano per metà gli angoli ABC, BCA con le linee rette BD, CD (9.I.), le quali concorrano insieme nel pun-

to D ; e da questo punto D si tirino le perpendicolari DE , DF , DG alle linee rette AB , BC , CA (12.I.).

E poichè l' angolo ABD è uguale all' angolo CBD , ed è pure l'angolo retto BED uguale al retto BFD ; saranno due triangoli EBD,DBF, che hanno due angoli uguali a due angoli , ed il lato BD comune ad entrambi , il quale sottende uno degli angoli uguali ; adunque avranno anche i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati (26. I.) , e sarà DE uguale a DF. Per la stessa ragione sarà eziandio DG uguale a DF; onde DE è uguale a DG : e però le tre linee rette DE, DF, DG sono tra loro uguali . Laonde il cerchio descritto dal centro D, con l'intervallo uguale ad una del DE, DF, DG, passerà anche per gli rimanenti punti , e toccherà le linee rette AB, BC, CA; poichè sono retti gli angoli in E, F, G, e la linea retta tirata perpendicolare al diametro del cerchio , nell' estremità sua , tocca il cerchio (16.III.) . Adunque ciascuna delle AB , BC , CA tocca il cerchio ; e questo sarà perciò iscritto nel triangolo ABC.

Quindi nel dato triangolo ABC si è iscritto il cerchio EFG. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

Al dato triangolo circoscrivere il cerchio.

Sia dato il triangolo ABC [*fig.5.n.1.2.e 3.*] : fa d' uopo circoscrivere il cerchio al dato triangolo ABC.

Si dividano per metà le AB , AC (10. I.) ne' punti D , E , da' punti D, E si tirino alle AB , AC le perpendicolari DF , EF (11. I.) , le quali prolungate dovranno necessariamente incontrarsi ; poichè congiunta la DE , gli angoli EDF , DEF risultano minori di due retti (*post.5.*)

S' incontrino in F, e giungansi le BF, FC, FA. Perchè dunque la AD è uguale alla DB, e la DF è comune, e ad angoli retti; sarà la base AF uguale alla base FB (4.I.). Similmente si dimostrerà la AF uguale alla FC; adunque anche la BF è uguale alla FC: che però le tre linee rette FA, FB, FC sono uguali fra loro; onde il cerchio descritto dal centro F, con l' intervallo una delle FA, FB, FC, passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà il cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Adunque al dato triangolo si è circoscritto il cerchio. — *C. B. F.*

Cor. È manifesto, che se il centro del cerchio cada dentro il triangolo, ciascun angolo di questo, esistendo in un segmento maggiore del semicerchio, sia minore del retto (31.III.). Che se poi il centro cada in un de' lati, l' angolo ch'è sotteso da questo lato, esistendo nel semicerchio, sarà retto; e cadendo il centro fuori del triangolo, dalla parte dell' un de' lati, l' angolo ch' è sotteso da questo lato, esistendo nel segmento minore del semicerchi o, sarà maggiore del retto. Laonde se il triangolo dato sia acutangolo. il centro cadrà dentro il triangolo; se sia rettangolo, cadrà il centro in quel lato, che sottende l' angolo retto; e se sia ottusangolo, il centro cadrà fuori del triangolo, dalla parte del lato opposto all' angolo ottuso.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

Nel dato cerchio iscrivere un quadrato.

Sia dato il cerchio ABCD [*fig.* 6.]: fa d' uopo iscrivere un quadrato nel cerchio ABCD.

Si tirino i diametri AC, BD del cerchio ABCD ad angoli retti tra loro, e giungansi BA, BC, CD, DA.

Ed essendo la BE uguale alla DE, perchè E è centro, e la EA comune, e ad angoli retti; sarà la base BA uguale alla base AD (4.I.). Per la stessa ragione l' una, e l' altra di esse BC, CD è uguale all' una, e l' altra BA, AD; adunque il quadrilatero ABCD è equilatero. Dico essere ancora rettangolo. Imperocchè essendo la linea retta BD diametro del cerchio ABCD, sarà BAD semicerchio;e perciò l'angolo BAD è retto (23.III.): e per la stessa ragione è retto ciascun degli altri angoli ABC, BCD, CDA: laonde il quadrilatero ABCD è rettangolo; si è pur dimostrato equilatero. Adunque sarà quadrato, ed è iscritto nel cerchio ABCD.

Quindi nel dato cerchio ABCD si è iscritto un quadrato ABCD. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

Al dato cerchio circoscrivere un quadrato.

Sia dato il cerchio ABCD [*fig.7.*]: fa d' uopo circoscrivere un quadrato al cerchio ABCD.

Tirinsi due diametri BD, AC del cerchio ABCD, l'uno perpendicolare all' altro; e poi per gli punti A, B, C, D si tirino le linee rette FG, GH, HK, KF, che tocchino il cerchio ABCD (17.III.).

E poichè la FG tocca il cerchio ABCD, e dal centro al contatto A si è tirata la EA; saranno retti gli angoli in A (1.III.): e per la stessa ragione sono retti gli angoli ne' punti B, C, D. Or essendo retto l' angolo AEB, ed anche retto l' altro EBG; sarà la GH parallela alla AC (28.I.): e per la stessa ragione la AC è parallela alla FK. Dimostreremo similmente, che tanto la GF, quanto la HK sia parallela alla

BED ; perciò i quadrilateri GK , GC , AK , FB , BK sono parallelogrammi ; e quindi sarà la GF uguale alla HK , e la GH alla FK (34.I.) . Laonde essendo la AC uguale alla BD , e la AC uguale sì alla GH , che alla FK, la BD uguale sì alla GF , che alla HK ; sarà l' una , e l' altra GH , FK uguale all' una , e l' altra GF , HK ; e però il quadrilatero FGHK è equilatero. Dico che sia anche rettangolo. Poichè essendo GBEA un parallelogrammo , che ha l' angolo AEB retto ; sarà anche retto l' altro AGB (34.I.) . Similmente dimostreremo esser retti gli angoli ne' punti H, K, F; quindi il quadrilatero FGHK è rettangolo : si è pur dimostrato equilatero , è dunque un quadrato , ed è circoscritto al cerchio ABCD.

Perciò al dato cerchio si è circoscritto un quadrato. *C.B.F.*

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

Nel dato quadrato iscrivere il cerchio .

Sia dato il quadrato ABCD [*fig.8.*] : fa d' uopo iscrivere il cerchio nel quadrato ABCD.

Dividasi per metà ciascuna delle AB, AD ne' punti F, E; e per E si tiri la EH parallela ad una di esse AB,CD (31.I.), per F la FK parallela ad una delle AD , BC : è dunque parallelogrammo ciascuno de' quadrilateri AK , KB , AH , HD , AG , GB , GC , GD ; e perciò sono uguali i loro lati opposti (34.I.) . Or essendo la DA uguale alla AB , e la AE metà della AD , la AF metà della AB , sarà la AE uguale alla AF : onde sono anche uguali i lati opposti ad essi ; e perciò la FG è uguale alla GE . Dimostreremo similmente sì la GH , che la GK uguale all' una , e l' altra FG , GE ; quindi le quattro linee rette GE, GF, GH, GK sono ugua-

li fra loro ; che però il cerchio descritto dal centro G , con l' intervallo uguale ad una delle GE, GF, GH, GK , passerà anche pe' rimanenti punti , e toccherà le linee rette AB,BC, CD, DA, perchè sono retti gli angoli ne' punti F, H, K , E, e la linea retta tirata perpendicolare al diametro del cerchio, nell' estremità di esso , tocca il cerchio (16.III.) . Laonde le linee rette AB, BC, CD, DA toccano il cerchio ; e quindi tal cerchio sarà iscritto nel quadrato ABCD.

Adunque nel dato quadrato si è descritto il cerchio. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Al dato quadrato circoscrivere il cerchio.

Sia dato il quadrato ABCD [*fig.9.*] : fa d'uopo circoscrivere il cerchio al quadrato ABCD .

Giungansi le AC , BD , le quali s' interseghino in E .

Ed essendo la DA uguale alla AB, e la AC comune; le due AD , AC sono uguali alle due BA , AC , e la base DC è uguale alla base CB ; quindi sarà l'angolo DAC uguale all'angolo BAC (8. I.) . Adunque l' angolo DAB è diviso per metà dalla linea retta AC . Similmente dimostreremo , che ciascuno degli angoli ABC , BCD , CDA sia diviso per metà dalle linee rette AC , DB. Or essendo l' angolo DAB uguale all' angolo ABC , e l' angolo EAB metà dell' angolo DAB , l' angolo EBA metà dell' angolo ABC ; sarà l' angolo EAB uguale all' angolo EBA : quindi il lato EA sarà uguale al lato EB (6.I.) . Dimostreremo nel modo stesso , che ciascuna delle linee rette EC, ED sia uguale a ciascuna delle EA , EB ; onde le quattro linee rette EA, EB, EC, ED sono uguali fra loro : che perciò il cerchio descritto dal centro

E, con l' intervallo una delle EA, EB, EC, ED, dovrà anche passare pe' rimanenti punti, e sarà circoscritto al quadrato ABCD.

Adunque al dato quadrato si è circoscritto il cerchio. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Costituire un triangolo isoscele, che abbia ciascun degli angoli alla base doppio del rimanente. (*V. N.*)

Si esponga una qualche linea retta AB [*fig. 10.*], la quale si divida nel punto C in modo, che il rettangolo contenuto dalle AB, BC sia uguale al quadrato di CA (11. II.); e dal centro A, con l' intervallo AB, si descriva il cerchio BDE, nel quale si adatti la linea retta BD uguale alla AC, che non è maggiore del diametro del cerchio BDE (1. IV.); indi congiunte le AD, DC, si circoscriva al triangolo ADC il cerchio ACD (5. IV.).

Or essendo il rettangolo di AB, BC uguale al quadrato di AC, e la AC uguale alla BD; sarà il rettangolo di AB, BC uguale al quadrato di BD. Per lo che essendosi preso fuori del cerchio DCA il punto B, dal quale cadono nel cerchio le due linee rette BCA, BD, l' una delle quali lo sega, l'altra l' incontra, ed il rettangolo di AB, BC è uguale al quadrato di BD; la linea retta BD dovrà toccare il cerchio (37. III.). E perchè la BD tocca il cerchio ACD, e dal contatto D si è tirata la DC; sarà l' angolo BDC uguale a quello, che si costituisce nel segmento alterno del cerchio, cioè all' angolo DAC (32. III). Ed essendo l'angolo BDC uguale all'altro DAC, aggiunto comune l' angolo CDA; sarà tutto l' angolo BDA uguale a' due altri CDA, DAC: ma agli angoli

CDA, DAC è altresì uguale l' esteriore BCD (32.I.); adunque l' angolo BDA è uguale all' altro BCD: è poi l' angolo BDA uguale all' angolo DBA, perchè il lato AD è uguale al lato AB (5.I.); quindi sarà anche DBA uguale a BCD, e perciò sono tra loro uguali i tre angoli BDA, DBA, BCD. E perchè l' angolo DBC è uguale all' altro BCD, il lato BD sarà uguale al lato DC (6.I.): ma BD si è posta uguale ad AC; adunque anche AC è uguale a CD, e perciò l' angolo CDA è uguale all' angolo DAC (5.I.); onde gli angoli CDA, DAC presi insieme sono il doppio dell' angolo DAC. È poi l' angolo BCD uguale agli angoli CDA, DAC; adunque anche BCD è doppio di DAC. Ma l' angolo BCD è uguale a ciascuno degli altri BDA, DBA; perciò ciascun di questi BDA, DBA è doppio di DAB.

Si è dunque costituito il triangolo isoscele ADB, che ha ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Nel dato cerchio iscrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDE [*fig.11.*]: fa d' uopo iscrivere nel cerchio ABCDE un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Costituiscasi un triangolo isoscele FGH, il quale abbia ciascuno degli angoli G, H doppio dell'angolo F (10.IV.); di poi s' iscriva nel cerchio ABCDE il triangolo ACD equiangolo al triangolo FGH (2. IV.), dimodochè all' angolo F sia uguale l' angolo CAD, ed a ciascuno di quelli G, H, sia uguale ciascuno degli altri ACD, CDA; quindi l' uno,

e l' altro degli angoli ACD,CDA è doppio dell'angolo CAD. Si divida per metà ciascuno di essi ACD, CDA con le linee rette CE, DB, e giungansi AB, BC, DE, EA .

E poichè ciascuno degli angoli ACD , CDA è doppio dello stesso angolo CAD, e si sono quelli divisi per metà con le linee rette CE , DB ; perciò i cinque angoli DAC , ACE , ECD, CDB, BDA saranno fra loro uguali . Or angoli uguali insistono sopra archi uguali (23.III.); laonde i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono uguali fra loro : ma archi uguali sono sottesi da linee rette uguali (29.III.); quindi sono anche uguali fra loro le cinque linee rette AB, BC, CD, DE , EA ; e perciò il pentagono ABCDE è equilatero. Dico esser anche equiangolo. Imperocchè essendo l' arco AB uguale all' arco DE , aggiunto comune l' arco BCD ; sarà tutto l'arco ABCD uguale a tutto l'arco EDCB : ma sull'arco ABCD insiste l' angolo AED, e sull' altro EDCB insiste l'angolo BAE ; adunque l' angolo AED è uguale all' altro BAE. Per la stessa ragione ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale a ciascuno di essi BAE, AED ; quindi il pentagono ABCDE è equiangolo : e si è già dimostrato equilatero.

Adunque nel dato cerchio si è iscritto un pentagono equilatero, ed equiangolo. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Al dato cerchio circoscrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo. (*V.N.*)

Sia dato il cerchio ABCDE [*fig. 12.*] fa d' uopo circoscrivere al cerchio ABCDE un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Si concepiscano essere A, B, C, D, E i vertici degli angoli del pentagono iscritto in tal cerchio (11.IV.), in modo che gli archi AB, BC, CD, DE, EA sieno uguali ; e pe'punti A, B, C, D, E si tirino al cerchio le tangenti GH, HK, KL, LM, MG (17.III.) : indi preso il centro F del cerchio ABCDE, giungansi FB, FK, FC, FL, FD.

E perchè la linea retta KL tocca il cerchio ABCDE nel punto C, e dal centro F al contatto C si è tirata la FC ; sarà la FC perpendicolare alla KL (18.III.), ond'è retto ciascuno degli angoli in C : e per la stessa ragione sono anche retti gli angoli B, D. Or essendo retto l' angolo FCK, il quadrato di FK è uguale a' quadrati di FC, CK (47.III.): similmente il quadrato di FK è uguale a' quadrati di FB, BK ; adunque i quadrati di FC, CK sono uguali a' quadrati di FB, BK : ma di questi quadrati quello di FC è uguale all' altro di FB ; quindi il rimanente quadrato di CK sarà uguale al rimanente quadrato di BK, e però la BK è uguale alla CK. Ed essendo FB uguale ad FC, ed FK comune, le due BF, FK sono uguali alle due CF, FK : è pure la base BK uguale alla base KC ; sarà dunque l' angolo BFK uguale all'angolo KFC (8. I.), e l'angolo BKF all' angolo CKF : laonde l'angolo BFC è doppio dell'altro KFC, e l'angolo BKC è doppio dell'angolo FKC. Per la stessa ragione ancor l'angolo CFD è doppio dell'altro CFL, e l'angolo CLD è doppio di CLF. Or essendo l'arco BC uguale all' arco CD, l'angolo BFC sarà uguale all'angolo CFD (27.III.): ma l'angolo BFC è doppio dell'angolo KFC, e l' angolo DFC è doppio di LFC ; quindi l' angolo KFC è uguale all' angolo CFL. Laonde i due triangoli FKC, FLC avendo due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, cioè CF, che ad essi è comune ; avranno i rimanenti lati ugnali a' rimanenti lati, ed il rimanente angolo uguale al rimanente angolo (26.I.) : è dunqne la linea retta KC uguale all'altra CL, e l'agolo FKC uguale all' ango-

lo FLC. E poichè KC è uguale a CL; sarà la KL doppia della KC: e per la stessa ragione anche la KH è doppia della BK. Adunque essendosi dimostrata la BK uguale alla KC, ed essendo poi la KL doppia della KC, e la HK doppia della BK; sarà la HK uguale alla KL. E della stessa maniera ciascuna delle GH, GM, ML si dimostrerà uguale all'una, e l'altra KH, KL. Quindi il pentagono GHKLM è equilatero.

Dico che sia ancora equiangolo. Poichè essendo l'angolo FKC uguale all'angolo FLC, ed essendosi dimostrato l'angolo HKL doppio di FKC, e l'angolo KLM doppio di FLC; sarà l'angolo HKL uguale all'angolo KLM. In simil modo si dimostrerà ciascuno degli angoli KHG, HGM, GML uguale a ciascuno degli angoli HKL, KLM. Adunque i cinque angoli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH sono uguali fra loro, e perciò il pentagono GHKLM è equiangolo: si è pur dimostrato essere equilatero, ed è circoscritto al cerchio ABCDE. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Nel dato pentagono equilatero, ed equiangolo iscrivere il cerchio. (*V.N.*)

Sia dato il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE [*fig.13.*]: fa d'uopo iscrivere il cerchio nel pentagono ABCDE.

Dividasi per metà ciascuno degli angoli BCD, CDE (9.I.), con le linee rette CF, DF, e dal punto F, nel quale fra loro convengono le CF, DF, si tirino le linee rette FB, FA, FE.

Perchè dunque la BC è uguale alla CD, e la CF comune; le due BC, CF sono uguali alle due DC, CF, è pure l'angolo BCF uguale all'angolo DCF; adunque la base BF

è uguale alla base FD, il triangolo BCF è uguale al triangolo DCF, ed i rimanenti angoli sono uguali a' rimanenti angoli, l' uno all' altro, quelli, che sono sottesi da' lati uguali (4.I.): quindi l'angolo CBF è uguale all'angolo CDF. Laonde essendo l'angolo CDE doppio di CDF, e CDE uguale a CBA, CDF a CBF; sarà anche CBA doppio di CBF; che perciò l' angolo ABF è uguale all' angolo FBC, onde l'angolo ABC è anch' esso diviso per metà dalla linea retta BF. Si dimostrerà similmente, che ciascuno degli angoli BAE, AED sia diviso per metà dalle linee rette AF, FE. Or dal punto F si tirino alle linee rette AB, BC, CD, DE, EA la perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM (12.I.). E perchè l'angolo HCF è uguale all'altro KCF, ed è il retto FHC uguale al retto FKC; perciò i due triangoli FHC, FKC, che hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, cioè FC, ch'è comune ad entrambi, ed il quale sottende uno degli angoli uguali; avranno i rimanenti lati uguali a'rimanenti lati (26.I.), e sarà la perpendicolare FH uguale alla perpendicolare FK. Si dimostrerà similmente ciascuna delle FL, FM, FG uguale all' una, e l'altra FH, FK; quindi le cinque linee rette FG, FH, FK, FL, FM sono uguali fra loro. Laonde descritto il cerchio dal centro F, con l' intervallo una delle FG, FH, FK, FL, FM, questo passerà anche pe' rimanenti punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CD, DE, EA, perchè sono retti gli angoli in G, H, K, L, M; e quella linea retta, che si tira perpendicolare al diametro del cerchio, nell' estremità di esso, tocca il cerchio (16. III.). Adunque ciascuna delle AB, BC, CD, DE, EA tocca il cerchio; e perciò questo sarà iscritto nel pentagono ABCDE.

Quindi nel dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è iscritto il cerchio — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Al dato pentagono equilatero, ed equiangolo circoscrivere il cerchio. (*V.N.*)

Sia dato il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE [*fig.14.*] : fa d'uopo circoscrivere il cerchio ad esso pentagono ABCDE.

Ciascuno degli angoli BCD,CDE si divida per metà (9.I.) con le linee rette CF, FD ; e dal punto F, nel quale tali linee rette convengono, si tirino a'punti B,A,E le FB,FA,FE.

Si dimostrerà come nella precedente, che ciascuno degli angoli CBA, BAE, AED sia diviso per metà dalle linee rette BF, FA, FE. E perchè l'angolo BCD è uguale all'altro CDE, e dell'angolo BCD n'è metà l'angolo FCD; dell'angolo CDE n'è metà l'altro CDF ; sarà l'angolo FCD uguale all'angolo FDC ; onde il lato CF è uguale al lato FD (6.I.). Si dimostrerà similmente, che ciascuna delle FB, FA, FE sia uguale all'una, e l'altra FC, FD ; adunque le cinque linee rette FA, FB, FC, FD, FE sono uguali fra loro : che perciò il cerchio descritto dal centro E, con l'intervallo una di esse FA, FB, FC, FD, FE passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà circoscritto al pentagono ABCDE, ch'è eqnilatero, ed equiangolo.

Laonde al dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è circoscritto il cerchio. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

Iscrivere nel dato cerchio un esagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDEF [*fig. 15.*] : fa d' uopo iscrivere in questo cerchio ABCDEF un esagono equilatero, ed equiangolo.

Si prenda il centro G del cerchio ABCDEF, e tirisi un diametro AD ; di poi dal centro D, con l' intervallo DG si descriva il circolo EGCH, e giunte le EG, CG, si producano ne' punti B,F, ed uniscansi AB, BC, CD, DE, EF, FA : dico, che l' esagono ABCDEF sia equilatero, ed equiangolo.

Poichè il punto G è centro del cerchio ABCDEF ; sarà la GE uguale alla GD. E similmente essendo D centro del cerchio EGCH, sarà la DE uguale alla DG : ma la GE si è dimostrata uguale alla GD ; sarà dunque la GE uguale altresì alla ED. Quindi il triangolo EGD è equilatero ; e perciò i tre suoi angoli EGD, GDE, DEG sono uguali fra loro ; poichè gli angoli alla base de' triangoli isosceli sono fra loro uguali (5.I.). Ma i tre angoli di ogni triangolo sono uguali a due retti (32.I.) ; adunque l' angolo EGD è la terza parte di due retti : e similmente dimostreremo, che DGC sia la terza parte di due retti. Or perchè la linea retta CG insistendo sopra l'altra EB forma gli adjacenti angoli EGC, CGB uguali a due retti ; sarà anche il rimanente angolo CGB la terza parte di due retti ; che però gli angoli EGD, DGC, CGB sono uguali fra loro ; ma gli angoli BGA, AGF, FGE sono uguali rispettivamente a' loro angoli verticali EGD, DGC, CGB (15.I.) ; perciò i sei angoli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sono uguali fra loro. E perchè angoli uguali insistono sopra archi uguali (26. III.) ; dovranno i sei archi AB, BC,

CD, DE, EF, FA esser fra loro uguali. Ma archi uguali sono sottesi da linee rette uguali (29.III.) ; quindi anche le sei linee rette AB, BC, CD, DE, EF, FA sono uguali fra loro ; laonde l' esagono ABCDEF, è equilatero. Dico inoltre, che sia equiangolo. Imperocchè essendo l'arco AF uguale all' arco ED , se aggiungasi comune l' arco ABCD ; sarà tutto l' arco FABCD uguale a tutto l'altro EDCBA : ma sull'arco FABCD insiste l'angolo FED, e sull'arco EDCBA sta l' angolo AFE ; adunque l'angolo FED è uguale all' angolo AFE (27.III.). Similmente si dimostrerà ciascuno de' rimanenti angoli dell' esagono ABCDEF uguale all' uno, e l' altro angolo AFE , FED ; perciò l'esagono ABCDEF è equiangolo : si è dimostrato anche equilatero , ed è iscritto nel cerchio ABCDEF .

Adunque si è iscritto nel dato cerchio un esagono equilatero , ed equiangolo. — *C. B. F.*

Cor. È chiaro da ciò, che il lato dell' esagono sia uguale al raggio del cerchio in cui è iscritto.

E se per gli punti A, B, C, D, E, F si tirino le tangenti al cerchio, si circoscriverà ad esso l' esagono equilatero, ed equiangolo ; il che potrà dimostrarsi, come per lo pentagono. Ed inoltre , similmente, che per lo pentagono , s' iscriverà in un dato esagono equilatero,ed equiangolo il cerchio, e gli si circoscriverà. (*V.N.*)

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

Iscrivere nel cerchio dato un quindecagono equilatero, ed equiangolo. (*V.N.*)

Sia dato il cerchio ABCD [*fig.16.*] : fa d' uopo iscrivere in esso un quindecagono equilatero, ed equiangolo

Adattisi nel cerchio ABCD il lato AD del triangolo equilatero iscritto in esso (2.IV.), ed il lato AB del pentagono equilatero,ed equiangolo (11.IV.).È chiaro, che delle quindici parti, nelle quali si vuol dividere l' intera circonferenza ABCD, ne dovrà contenere cinque l' arco ABC, ch'è la terza parte della circonferenza, e tre l' altro arco AB, che n' è la quinta parte; e quindi il rimanente arco BC ne conterrà due. Si divida BC per metà in E; sarà sì l'arco BE, che l' altro EC la quindicesima parte dell' intera circonferenza ABCD : e perciò se adattinsi nel cerchio successivamente linee rette uguali alle congiungenti BE, EC, si sarà iscritto in esso il quindecagono equilatero, ed equiangolo. — *C. B. F.*

Scol. Seguendo il metodo stesso tenuto per lo pentagono, se, per gli punti delle divisioni della circonferenza si tirino le tangenti al cerchio, gli si circoscriverà il quindecagono equilalero ed equiangolo. E di più si potrà nel modo stesso in un dato quindecagono eqnilatero, ed equiangolo iscrivere il cerchio, o circoscrivergliela. (*V.N.*)

Fine del quarto libro.

IL QUINTO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. La grandezza minore è *parte* della grandezza maggiore, quando la minore misura la maggiore, *cioè quando la minore si contiene un certo numero di volte esattamente nella maggiore.*

II. La grandezza maggiore è *moltiplice* della minore, quando la maggiore è misurata dalla minore, *cioè quando la maggiore contiene un certo numero di volte esattamente la minore.*

III. La *ragione* è una certa convenienza scambievole di due grandezze dello stesso genere, per quanto si appartiene alla quantità loro. (*V.N.*)

IV. Quelle grandezze possono aver ragione fra loro, delle quali la minore moltiplicata, *cioè presa un numero di volto*, può superare la maggiore. *Tali grandezze diconsi* dello stesso genere, *o* omogenee. (*V.N.*)

V. Si dicono essere nella stessa ragione le grandezze la prima alla seconda, e la terza alla quarta; quando gli ugualmente moltiplici della prima, e della terza, presi secondo qualunque moltiplicità, o insieme superino, o insieme pareggino, o insieme sieno minori degli ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta, presi anche secondo qualunque moltiplicità. (*V.N.*)

VI. Le grandezze, che hanno la stessa ragione si dicono *proporzionali*.

N. B. Ordinariamente per dinotare, che quattro grandezze sono proporzionali, si usa dire, che la *prima sta alla seconda, come la terza alla quarta*.

VII. Quando poi di quelli ugualmente moltiplici, il moltiplice della prima superasse quello della seconda, ma l' ugualmente moltiplice della terza non superasse quello della quarta; allora si dice aver la prima alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta. (*r.n.*)

VIII. La *proporzione*, o *analogia* è la similitndine, *cioè l' uguaglianza* delle ragioni. (*r.n.*)

IX. La proporzione consiste almeno in tre termini.

X. Quando tre grandezze sono proporzionali,la prima dicesi avere alla terza ragion *duplicata* di quella, che ha alla seconda.

XI. Quando poi sono continnamente proporzionali quattro grandezze, la prima si dice avere alla quarta *triplicata* ragione di quella, che ha alla seconda: e così *quadruplicata*, se il numero delle grandezze continuamente proporzionali fosse cinque, *ec.* dando sempre denominazione alla ragione della prima all' ultima, per un' unità meno del numero delle quantità proporzionali. (*r.n.*)

Def. A. Se sieno quante grandezze si vogliano omogenee, la prima si dice avere all'ultima *ragione composta* dalla ragione,che ha la prima alla seconda, da quella,che la seconda alla terza, e dall'altra, che la terza ha alla quarta, e così successivamente sino all'ultima. (*r.n.*)

Per esempio, sieno le grandezze omogence A, B, C, D, la prima A si dice avere all' ultima D *ragion composta* dalla ragione di essa A a B, dalla ragione di B a C, e dalla ragione di C a D: o pure la ragione di A a D si dico composta dalle ragioni di A a B, B a C, C a D.

Quindi se la ragione di A a B sia la stessa, che quella di

E ad F, la ragione di B a C sia la stessa, che l'altra di G ad H, e la ragione di C a D la stessa, che quella di K ad L: si dice A avere a D ragione composta dalle ragioni, che sono le medesime di quelle di E ad F, di G ad H, e di K ad L. E lo stesso s' intende, quando per brevità si dice, che A ha a D ragion composta dalle ragioni di E al F, G ad H, K ad L.

E se la ragione di M ad N sia la stessa, che quella di A a D, poste le medesime cose dette poc' anzi, per brevità si dice, che la ragione di M ad N sia composta dalle ragioni di B ad F, G ad H, K ad L.

XII. Diconsi grandezze *omologhe* in una proporzione, gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro.

N. B. Colle seguenti voci si dinotano dagli antichi geometri alcune maniere di mutare, o l'ordine, o la grandezza de' termini di una, o di due ragioni,

XIII. La *permutazione di ragioni*, o *permutando*, è quando in due ragioni, i termini delle quali sieno tutti omogenei, si paragoni l'antecedente dell' una all' antecedente dell' altra, ed il conseguente di quella al conseguente di questa. (*V. N.*)

XIV. La *ragione inversa*, o *invertendo*. è il prendere il conseguente come antecedente, e paragonarlo all'antecedente come conseguente.

XV. La *composizione di ragione*, o *componendo*, è il paragone dell' antecedente, e del conseguente, insieme presi, allo stesso conseguente.

XVI. La *divisione di ragione*, o *dividendo*, è quando si prende l'eccesso dell' antecedente sul conseguente, e si paragona allo stesso conseguente.

XVII. La *conversione di ragione*, o *convertendo*, è quando si paragona l'antecedente al suo eccesso sul conseguente.

XVIII. *Per equalità* di ragione (*ex aequo*, o *ex aequali*) diecsi, quando sieno più grandezze omogenee, ed altrettante anche fra loro omogenee; e dal paragonare in certo modo, le ragioni de' termini prossimi di quelle con le altre de' ter-

mini prossimi di questi, si passi alla ragione de' termini primi delle due serie co' respettivi ultimi di esse.(*V.N.*)

Ed eccone di ciò due specie nelle seguenti definizioni.

XIX. La *proporzione ordinata* è quando sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche omogenee tra loro dall' altra, e stia la prima alla seconda nelle prime grandezze, come nelle altre la prima alla seconda, come poi nelle prime la seconda alla terza, così nelle altre la seconda alla terza, e così successivamente. (*V.N.*)

XX. La *proporzione perturbata* è, quando sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche tra loro omogenee dall' altra, e sia la prima alla seconda nelle prime grandezze, come la penultima all' ultima nelle seconde, come poi nelle prime, la seconda alla terza, così nelle seconde, l'antepenultima alla penultima, e così successivamente. (*V.N.*)

POSTULATO. (*V.N.*)

Concedasi, che date due grandezze omogenee, qual ragione ha la prima grandezza alla seconda, tal possa avere la seconda ad una terza a quella omogenea; o pure, che tale possa concepirsi averla una terza di qualunque genere ad una quarta a se omogenea.

ASSIOMI. (*V.N.*)

A. Gli equimoltiplici di una stessa grandezza, o di grandezze uguali, sono fra loro uguali.

È un estensione dell' assioma 6.

Cor. Quindi, *se due grandezze sieno disuguali, il moltiplice della maggiore supererà quello della minore.*

B. Le grondezze, che hanno lo stesso, o uguali equimoltiplici, sono fra loro uguali.

È similmente un estensione dell' assioma 7.

Cor. E però, *se il moltiplice di una grandezza sia maggiore dell' egualmente moltiplice di un'altra; quella sarà ancor maggiore di questa.*

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno equimoltiplici di altrettante grandezze, ciascuna di ciascuna; quante volte è moltiplice una grandezza di una, tante volte saranno moltiplici ancor tutte di tutte.

Sieno quante grandezze si vogliano AB, CD [*fig.1.*], equimoltiplici di altrettante grandezze E, F, ciascuna di ciascuna: dico, che quante volte AB è moltiplice di E, tante volte le AB, CD insieme sieno moltiplici delle E, F insieme.

Perciocchè essendo la AB egualmente moltiplice della E, che la CD della F; quante grandezze sono nella AB uguali alla E, altrettante saranno nella CD uguali alla F: si divida la AB in parti uguali alla E, che sieno AG, GB, e la CD si divida pure in parti uguali alla F, cioè CH, HD; sarà il numero delle parti CH, HD uguale al numero delle altre AG, GB. E perchè la AG è uguale alla E, e la CH alla F; saranno anche le AG, CH uguali alle E, F: e per la medesima ragione essendo la GB uguale alla E, e la HD uguale alla F; saranno anche le GB, HD uguali alle E, F. Perciò quante parti sono nella AB uguali alla E, tante ne saranno nelle AB, CD uguali alle E, F.: laonde quante volte è la AB moltiplice della E, tante volte saranno moltiplici le AB, CD insieme delle E, F insieme.

Se dunque quante grandezze si vogliano ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se la prima sia tanto moltiplice della seconda, quanto la terza della quarta, e sia la quinta tanto moltiplice della seconda, quanto la sesta della quarta; sarà ancor la prima insieme con la quinta tanto moltiplice della seconda, quanto la terza insieme con la sesta è moltiplice della quarta.

La prima AB [*fig.2.*] sia tanto moltipliee della seconda C, quanto la terza DE della quarta F, sia poi la quinta BG tanto moltiplice della seconda C, quanto la sesta EH della qnarta F: dico la prima insieme con la quinta, cioè la AG, esser tanto moltipliee della seconda C, quanto è moltiplice la terza insieme colla sesta, cioè la DH, della quarta F.

Poichè la AB è tanto moltipliee della C, quanto la DE della F; quante grandezze uguali alla C sono nella AB, altrettante nguali alla F saranno nella DE; per la stessa ragione, quante ne sono nella BG nguali alla C, tante ne saranno nella EH uguali alla F. Quindi quante ne sono in tutta la AG uguali alla C, altrettante ne saranno in tutta la DH nguali alla F; e perciò quanto la AG è moltiplice della C, altrettanto la DH lo è della F. Laonde la prima insieme colla quinta, cioè la AG, sarà tanto moltiplice della seconda C, quanto la terza insieme colla sesta, cioè la GH, è moltiplice della quarta F.

Se dunqne la prima sia tanto moltiplice *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se la prima sia tanto moltiplice della seconda, quanto la terza della quarta, e prendansi gli equimoltiplici della prima, e della terza; questi saranno anche equimoltiplici l'uno della seconda, l'altro della quarta.

Sia la prima A [*fig.3.*] tanto moltiplice della seconda B, quanto la terza C della quarta D, e prendansi dello A, C gli equimoltiplici EF, GH: dico, che debba eziandio la EF esser tanto moltiplice della B, quanto la GH della D.

Poichè la EF è tanto moltiplice della A, quanto la GH della C, quante grandezze sono nella EF uguali alla A, tante ne saranno nella GH uguali alla C: dividasi perciò la EF nelle grandezze EK, KF uguali alla A, e la GH nelle GL, LH ugnali alla C; sarà il numero delle EK, KF ugnale a qnello delle GL, LH. Ed essendo la A tanto moltiplice della B, quanto la C della D, e la EK uguale alla A, la GL alla C; sarà la EK tanto moltiplice della B, quanto la GL della D. Per la stessa ragione sarà la KF tanto moltiplice della B quanto la LH della D. Perchè dunque la prima EK è tanto moltiplice della seconda B, quanto la terza GL della quarta D, e la quinta KF è tanto moltiplice della seconda B, quanto la sesta LH della quarta D; sarà la prima insieme colla quinta, cioè la EF, tanto moltiplice della seconda B, quanto la terza insieme colla sesta, cioè la GH è moltiplice della quarta D (2.V.).

E perciò se la prima sia tanto moltiplice *ec.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; anche gli equimoltiplici della prima, e della terza avranno la stessa ragione agli equimoltiplici della seconda, e della quarta, secondo qualunque moltiplicità si prendano, se quelli si paragonino a questi. (*v.n.*)

La prima A [*fig.4.*] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e prendansi della A, C gli equimoltiplici qualunque E, F, e delle B, D gli altri qualsivogliano equimoltiplici G, H: dico, che stia la E alla G, come la F alla H.

Si prendano ancora delle E, F gli altri equimoltiplici K, L, e similmente delle G, H, gli altri equimoltiplici M, N. E poichè la E è tanto moltiplice della A, quanto la F della C, e si sono presi della E, F gli equimoltiplici K, L; sarà la K tanto moltiplice della A, quanto la L della C (3. V.). Per la stessa ragione la M sarà tanto moltiplice della B, quanto la N della D. Ed essendo la A alla B, come la C alla D, e si sono presi delle A, C gli equimoltiplici K, L, e delle B, D gli altri equimoltiplici M, N: però se la K supera la M, anche la L supererà la N; se è uguale, sarà uguale; se minore, minore. Ma sono le K, L equimoltiplici delle E, F, e delle M, N sono egualmente moltiplici le G, H: laonde come la E alla G, così starà la F alla H (*d.*5.V.).

Adunque se la prima abbia alla seconda *ec.* — *C.B.D.*

Cor. E similmente, se la prima abbia alla seconda la stessa ragione della terza alla quarta; gli equimoltiplici della

prima, e della terza avranno la stessa ragione alla seconda, e quarta. E del pari la prima, e terza avranno la stessa ragione agli equimoltiplici della seconda, e quarta.

Cioè nel primo caso, starà la E alla B, come la F alla D; e nel secondo la A alla G, come la C alla H (*v.n.*)

La dimostrazione procede come quella della proposizione 4, non prendendo nel primo caso gli equimoltiplici M, N delle G, H, e nel secondo quelli K, L delle E, F.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una grandezza sia tanto moltiplice di un' altra grandezza, quanto la tolta dalla prima è moltiplice della tolta dalla seconda, anche la rimanente sarà tanto moltiplice della rimanente, quanto tutta di tutta. (*v.n.*)

La grandezza AB [*fig.5.*] sia tanto moltiplice della grandezza CD, quanto la AE tolta dall' una l' è della CF tolta dall' altra: dico, che la rimanente EB sia tanto moltiplice della rimanente FD, quanto tutta la AB di tutta la CD.

Si ponga la EB tanto moltiplice della CG, quanto la AE è moltiplice della CF.

Ed essendo la AE tanto moltiplice della CF, quanto la EB della CG; sarà la AE tanto moltiplice della CF, quanto la AB della GF (1. V.). Ma si è supposto essere la AE tanto moltiplice della CF, quanto la AB della CD; adunque la AB è ugualmente moltiplice dell' una, e dell' altra GF, CD; e perciò la GF è uguale alla CD (*ass.A.V.*): tolgasi comune la CF, e sarà la rimanente CG uguale alla rimanente FD. Per la qual cosa essendo la AE tanto moltiplice

della CF, quanto la EB della CG , e la CG uguale alla DF; sarà la AE tanto moltiplice della CF , quanto la EB della FD : e si è supposto la AE tanto moltiplice della CF , quanto la AB della CD ; adunque la EB sarà tanto moltiplice della FD , quanto la AB della CD.

Laonde se una grandezza sia tanto moltiplice *ec.—C.B.D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due grandezze sieno equimoltiplici di due altre , e da quelle sien tolte due altre grandezze equimoltiplici di queste ; saranno le rimanenti o uguali a queste stesse , o equimoltiplici di esse. (*V.N.*)

Le due grandezze AB , CD [*fig.* 6.] sieno equimoltiplici delle altre due E , F , e di queste stesse ne sieno anche equimoltiplici le AG, CH , che si tolgono da quelle : dico, che le rimanenti GB, HD o sieno uguali alle E, F , o equimoltiplici di esse.

Imperocchè essendo la AB tanto moltiplice della E, quanto la CD della F ; quante grandezze sono nella AB uguali alla E , altrettante ne saranno nella CD uguali alla F ; e per la stessa ragione quante ne sono nella AG uguali alla stessa E , altrettante ne saranno nella CH uguali alla stessa F. Adunque tante ne dovrà contenere la rimanente GB uguali alla E , quante la rimanente HD uguali alla F . E però se la GB sia solamente uguale alla E , la HQ dovrà pur risultare uguale alla F ; e se la GB sia un moltiplice della E , la HD dovrà risultare un egual moltiplice della F .

Laonde se due grandezze sieno equimoltiplici. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta ; e la prima sia maggiore della seconda , anche la terza sarà maggiore della quarta ; e se uguale , uguale ; se minore , minore. (*V.N.*)

La prima A [*fig.A.*] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D : dico, che se la A è maggiore della B , anche la C sia maggiore della D , se uguale, uguale ; se minore , minore.

Imperocchè prendansi delle A, B, C, D gli stessi equimoltiplici qualsivogliano, per esempio i doppj, e sieno essi rispettivamente E, F, G, H.

E perchè la A sta alla B , come la C alla D , gli equimoltiplici E, G delle A, C si dovranno accordare o in superare , o in essere uguali , o minori degli equimoltiplici F, H delle B, D (*d.*5.V.) : che perciò è chiaro , che eziandio le grandezze A , C , che sono le metà , o in generale le stesse parti, rispettivamente delle E, G dovranno accordarsi o in superare , o in essere uguali , o minori delle B, D, che sono le metà , o in generale le stesse parti, delle F, H.

Adunque se la prima *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Se la prima sia quel moltiplice, o quella parte della seconda, che la terza della quarta; avrà la prima alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta.

La prima A [*fig. B.*] sia primieramente quel moltiplice della seconda B, che la terza C della quarta D : dico, che la ragione della A alla B sia uguale all' altra della C alla D.

Imperocchè presi delle A, C qualsivogliano equimoltiplici E, G, questi saranno ancora egualmente moltiplici delle B, D (3.V.) ; che però presi delle B, D gli altri qualsivogliano equimoltiplici F, H, se questi saranno secondo la stessa moltiplicità de' primi E, G, dovranno rispettivamente pareggiarli ; se di una minore moltiplicità, saranno minori l'un l'altro di E, G; se di una maggiore moltiplicità, supereranno rispettivamente E, G. Adunque si hanno le quattro grandezze A, B, C, D tali, che presi gli equimoltiplici E, G qualunque della prima A, e della terza C, e gli altri equimoltiplici pur qualunque F, H della seconda B, e della quarta D, si è dimostrato dover quelli accordarsi nel pareggiare, o in esser minori, o in superare questi ; dovrà però la ragione della A alla B pareggiar quella della C alla D (*d.*5.V.).

Che se le A, C si fossero supposte esser le stesse parti delle B, D ; sarebbero al contrario le B, D equimoltiplici della A, C ; e però presi delle B, D gli equimoltiplici F, H, con lo stesso ragionamento di poc'anzi si conchiuderà, che gli equimoltiplici F, H delle B, D debbano accordarsi in pareggiare, in esser minori, o maggiori degli equimoltiplici E, G delle A, C. Laonde avendo pur quattro grandezze A, B, C,

D, e gli equimoltiplici E, G della prima A, e della terza C accordandosi in pareggiare, superare, o esser minori degli equimoltiplici F, H della seconda B, e della quarta D; dovrà la ragione della A alla B pareggiar quella della C alla D.

Quindi se la prima *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

Se la prima stia alla seconda, come la terza alla quarta; e la prima sia un moltiplice, o una parte della seconda, la terza sarà un egual moltiplice, o la stessa parte della quarta.

Sia primieramente la prima A un moltiplice della seconda B [*fig.C.*] : dico, che la terza C debba essere un egual moltiplice della quarta D.

Imperocchè preso di B il moltiplice stesso E, che n' era la A, sarà la E uguale alla A : di poi si prenda della D l' egual moltiplice F.

Ed essendo la A alla B, come la C alla D, e le E, F equimoltiplici delle B, D; dovrà stare la A alla E, come la C alla F (*cor.4.V.*). Ma la A è uguale alla E; adunque ancor la C sarà uguale alla F, e però la C sarà quel moltiplice della D, che la A della B.

Che se la A sia una parte della B : dovrà la C essere la stessa parte della D.

Si prenda della A quel moltiplice E, che n' era la B; e poi la F, che sia un egual moltiplice della C; e la dimostrazione per questo caso procederà similmente al precedente.

E però se la prima stia alla seconda, *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VII.

TAOREMA.

Le grandezze uguali hanno la stessa ragione ad una medesima grandezza; e questa ha la stessa ragione alle uguali.

Sieno le grandezze uguali A, B [*fig.7.*], ed un'altra qualunque grandezza C: dico, che ciascuna delle A, B abbia alla C la stessa ragione: e che parimente la C abbia a ciascuna delle A, B la stessa ragione.

Si prendano delle A, B gli equimoltiplici D, E, e della C un qualunque altro moltiplice F.

E perchè la D è tanto moltiplice della A, quanto la E della B, ed è la A uguale alla B; sarà anche la D uguale alla E (*ass.1.V.*). È poi la F un'altra grandezza qualunque: adunque se la D supera la F, anche la E supererà la F, e se è uguale, sarà uguale; se minore, minore. Sono ancora le D, E equimoltiplici delle A, B, e la F è un qualunque altro moltiplice della C; adunque come la A alla C, così è la B alla stessa C (*d.*5.V.).

Dico inoltre, che la C abbia la medesima ragione a ciascuna delle A, B.

Poichè, fatto lo stesso apparecchio, dimostreremo similmente, che la D sia uguale alla E: è poi la F un'altra grandezza qualunque: adunque se la F supera la D, supererà anche la E; se è uguale, sarà uguale; se minore, minore. Ma è la F un moltiplice della C, e le D, E sono altri equimoltiplici delle A, B; adunque la C starà alla A come la stessa C alla B (*d.*5.V.).

E perciò le grandezze uguali *ec.* —*C.B.D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Delle grandezze disuguali la maggiore ha ad una stessa maggior ragione ,che la minore : e la stessa ha alla minore maggior ragione , che alla maggiore. (*V.N.*)

Sieno le grandezze disugnali AB, BC [*fig. 8.*] , ed AB la maggiore, ed un' altra D sia comunque : dico , che la AB abbia alla D maggior ragione, che la BC alla D ; e che la D abbia alla BC maggior ragione , che alla AB.

Se delle AC, CB quella, ch' è più piccola sia minore di D, essa, o che sia la AC, o pur la CB, moltiplicata potrà divenire una volta maggiore della D (*d.4.*V.). Si moltiplichi finchè diventi maggiore della D ; e quante volte l' una si è moltiplicata , tante volte si moltiplichi ancor l' altra , e sia la EF un tal moltiplice della AC , che superi la D , la FG poi l' ugualmente moltiplice della CB ; sarà quindi tanto la EF , quanto la FG maggiore della D. Se poi si la BC, che la CA sia maggiore della D , basterà prendere qualsivogliano equimoltiplici di esse. In ciascuno di questi casi , si prenda della D il doppio H , il triplo K , e così successivamente , fintantochè si abbia quel moltiplice della D, ch' è il primo a superare la FG : sia questo la L , e dinoti la K quell' altro moltiplice della stessa D , ch' è prossimamente minore della L .

E perchè la L è il moltiplice della D, ch'è il primo a superare la FG ; non sarà la K maggiore della FG : che però la FG non sarà minore della K. Ed essendo la EF tanto moltiplice della AC, quanto la FG della CB ; sarà anche la FG tanto moltiplice della CB , quanto la EG della AB (1.V) ;

onde le EG, FG sono equimoltiplici delle AB, CB: ma la FG si è dimostrata non minore della K, e per costruzione la EF supera la D; quindi l'intera EG supererà le K, D insieme. Sono poi le K, D insieme uguali alla L; adunque la EG supera la L, e la FG non supera la stessa L: e le EG, FG sono egualmente moltiplici delle AB, AC, e la L è un certo moltiplice della D; adunque la AB ha alla D maggior ragione, che la BC alla D (*d.*7.V.).

Inoltre la D alla BC avrà maggior ragione, che la D alla AB. Poichè, fatta la stessa costruzione, si dimostrerà similmente, che la L superi la FG, ma che non superi la EG: ed è la L un moltiplice della D, e le FG, EG sono alcuni altri equimoltiplici delle CB, AB; adunque avrà la D alla CB maggior ragione, che la D alla AB (*d.* 7. V.).

Quindi delle grandezze disugnali *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Quelle grandezze, che hanno ad una medesima la stessa ragione, sono uguali fra loro: e quelle alle quali una medesima ha la stessa ragione, sono ancora fra loro uguali. (*V.N.*)

Abbia ciascuna delle A, B [*fig.* 9.] la stessa ragione alla C: dico, che la A sia uguale alla B.

Poichè se la A non è uguale alla B, ciascuna di esse non avrà la stessa ragione alla C (8.V.): ma glie l' ha; adunque la A è uguale alla B.

Similmente abbia la C a ciascnna delle A, B la stessa ragione: dico la A essere uguale alla B.

Poichè se non è così, non avrà la C la stessa ragione a

ciascuna delle A, B (8. V.): ma glie l' ha; adunque la A è uguale alla B.

E perciò le grandezze *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Delle grandezze, che hanno ragione ad una medesima, quella, che ha a questa maggior ragione è maggiore: ed è minore poi quella alla quale la medesima ha maggior ragione. (*V.N.*)

Abbia la A alla C [*fig.10.*] maggior ragione della B alla C: dico esser la A maggiore della B.

Perciocchè se non è maggiore, o è uguale, o minore. Or non è la A uguale alla B; poichè ciascuna delle A, B avrebbe la medesima ragione alla C (7.V.): ma non l' ha; adunque la A non è uguale alla B. Nè tampoco la A è minore della B; poichè la A avrebbe alla C minor ragione, che la B (8.V.): ma non l' ha minore; perciò la A non è minore della B. Si è anche dimostrato, che non è uguale; adunque la A sarà maggiore della B.

Similmente abbia la C alla B maggior ragione, che la C alla A: dico esser la B minore della A.

Poichè se la B non è minore della A, o gli è uguale, o n' è maggiore. Ma non è la B uguale alla A; perchè allora la C avrebbe alla A la stessa ragione, che alla B (7.V.); e non l' ha; adunque la A non è uguale alla B. Nè tampoco la B è maggiore della A; poichè avrebbe la C alla B minor ragione, che alla A (8.V.); e non l' ha; adunque la B non è maggiore della A. Si è dimostrato, che non è uguale; quindi la B sarà minore della A.

E perciò delle grandezze, *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Quelle ragioni, che sono uguali ad una medesima, sono uguali anche fra loro.

Sia come la A alla B [*fig.* 11.], così la C alla D, e come la C alla D, così la E alla F: dico, che come la A alla B, così stia la E slla F.

Si prendsno delle A, C, E gli equimoltiplici G, H, K, delle B, D, F gli altri eqnimoltiplici qualunque L, M, N.

E perchè la A sta alla B, come la C alla D, e si sono presi delle A, C gli equimoltiplici G, H, e delle B, D gli altri equimoltiplici qualunque L, M; perciò se G supera L, anche H supererà M; se è nguale, sarà ugualc; se minore, minore (*d*.5.V.). Similmente, poichè la C sta alla D, come la E alla F, e si sono presi delle C, E gli equimoltiplici H, K, delle D, F gli altri equimoltiplici qualunque M, N; perciò se la G supera la M, anche la K supererà la N; se è nguale, sarà uguale; se minore, minore (*d*.5.V.). Or se la H supera la M, si è dimostrato, che anche la G superi la L; e se è uguale, uguale; se minore, minore. Adunque se la G snperi la L, la K snpererà la N; e se è nguale, sarà ngnale, se minore, minore. Sono poi le G, K equimoltiplici delle A, E, c le L,N sono altri cquimoltiplici qualunquc delle B,F. Quindi come la A alla B, così starà la E alla F (*d*.5.V.).

E perciò quelle ragioni, *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se quante grandezze omogenee si vogliano sieno proporzionali, come sta una delle antecedenti alla sua conseguente, così staranno tutte le antecedenti a tutte le conseguenti.

Sieno quante grandezze omogenee si vogliano proporzionali A, B, C, D, E, F [*fig.12.*], e come la A alla B, così stia la C alla D, e la E alla F : dico come la A alla B così esser le A, C, E insieme alle B, D, F insieme.

Si prendano delle A, C, E gli equimoltiplici G, H, K, e delle B, D, F, gli altri equimoltiplici qualunque L, M, N.

E poichè come la A alla B, così sta la C alla D, e la E alla F, e si sono presi delle A, C, E gli equimoltiplici G, H, K, e delle B, D, E gli altri qualunque equimoltiplici L, M, N; perciò se G supera L, H supererà M, e K, N; se G è uguale ad L, anche H, K saranno respettivamente uguali ad M, N; e se minore, minori (*d*.5.V.). Per la qual cosa se G supera L, anche G, H, K insieme dovranno superare L, M, N insieme; e se è uguale, saranno uguali; se minore, minori : sono poi G, e G, H, K equimoltiplici delle A, ed A, C, E; poichè se vi sieno quante grandezze si vogliano equimoltiplici di altrettante, ciascuna di ciascuna, quanto una è moltiplice di una, tanto tutte lo sono di tutte (1.V.) : e per la medesima ragione le L, ed L, M, N sono equimoltiplici delle B, e B, D, F. Quindi come la A alla B così dovranno stare le A, C, E insieme alle B, D, F insieme. (*d*.5.V.)

Adunque, se quante grandezze omogenee *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta, e la terza abbia alla quarta maggior ragione, che la quinta alla sesta; anche la prima avrà alla seconda maggior ragione, che la quinta alla sesta.

La prima A [*fig.13.*] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D, e la terza C abbia alla quarta D maggior ragione, che la quinta E alla sesta F: dico, che la prima A abbia alla seconda B maggior ragione, che la quinta E alla sesta F.

Poichè la C ha alla D maggior ragione, che la E alla F, vi saranno tali equimoltiplici delle C, E, e tali altri delle D, F, che il moltiplice di C superi quello di D, ma l' egualmente moltiplice di E non superi quello di F (*d.* 7. V.). prendansi, e sieno delle C, E gli equimoltiplici G, H, e delle D, F gli altri K, L; sicchè la G superi la K, ma la H non superi la L: poi quanto la G è moltiplice della C, tanto si faccia la M moltiplice della A; e quanto la K è moltiplice della D, tanto si faccia la N moltiplice della B. E poichè la A sta alla B, come la C alla D, e si sono presi delle A, C gli equimoltiplici M, G, e delle B, D gli altri equimoltiplici N, K; perciò se la M supera la N, la G supererà la K; e se uguale, sarà uguale; se minore, minore (*d*.5.V.). Ma la G supera la K; adunque anche la M supererà la N; la H poi non supera la L: e sono le M, H equimoltiplici delle A, E, e le N, L altri equimoltiplici delle B, F. Adunque la A avrà alla B maggior ragione, che la E alla F (*d*.7.V.).

E perciò se la prima ec. — *C.B.D.*

Cor. Se la prima abbia alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta, la terza poi abbia alla quarta la stessa ragione, che la quinta alla sesta, si dimostrerà similmente, che la prima debba avere alla seconda maggior ragione, che la quinta alla sesta. (*V.N.*)

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se la prima di quattro grandezze omogenee abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta, e la prima sia maggiore della terza; anche la seconda sarà maggiore della quarta; e se uguale, uguale; se minore, minore. (*V.N.*)

La prima A [*fig.14.*] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e sia la A maggiore della C: dico essere eziandio la B maggiore della D.

Poichè la A è maggiore della C, e la B è un' altra grandezza qualunque: avrà la A alla B maggior ragione, che la C alla B (8.V.): ma come la A alla B, così sta la C alla D; adunque la C avrà alla D maggior ragione, che la C alla B (13.V.). Or quella grandezza alla quale una stessa ha maggior ragione, è minore (10.V.); quindi la D è minore della B; e perciò la B sarà maggiore della D.

Sia in secondo luogo la A uguale alla C: dico essere la B uguale alla D.

Poichè essendo la A alla B, come la C, ossia la A alla D, sarà la B uguale alla D (9.V.).

Finalmente se la A sia minore della C; sarà anche la B minore della D.

Imperocchè sarà la C maggiore della A; e però essendo la C alla D, come la A alla B, si dimostrerà, come nel

caso primo, che la D sia maggiore della B, cioè la B minore della D.

Quindi se la prima di quattro grandezze omogenee abbia alla seconda *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Le parti hanno l'una all'altra la medesima ragione, che i loro equimoltiplici.

Sia la AB tanto moltiplice della C [*fig.15.*], quanto la DE della F : dico, che come la C alla F, così stia la AB alla DE.

Poichè la AB è tanto moltiplice della C, quanto la DE della F, quante grandezze sono nella AB uguali alla C, altrettante ne saranno nella DE uguali alla F. Dividasi perciò la AB in grandezze uguali alla C, le quali sieno le AG,GH, HB, e la DE si divida pure in grandezze uguali alla F, cioè nelle DK, KL, LE ; sarà il numero delle AG, GH, HB uguale al numero delle DK, KL, LE. Or poichè sono uguali le AG, GH, HB, come pure sono fra loro uguali le DK, KL, LE ; sarà come la AG alla DK, così la GH alla KL, e la HB alla LE : e perciò sarà ancora, come una delle antecedenti alla sua conseguente, così tutte le antecedenti a tutte le conseguenti (12.V.). Adunque come la AG alla DK, così sta la AB alla DE : ma la AG è uguale alla C, e la DK alla F ; quindi come la C alla F, così starà la AB alla DE.

E perciò le parti hanno l'una all'altra *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro grandezze omogenee sieno proporzionali, *permutando* saranno anche proporzionali. (*V.N.*)

Sieno proporzionali le quattro grandezze omogenee A, B, C, D [*fig.46.*], e sia come la A alla B, così la C alla D: dico, che permutando sieno anche proporzionali, cioè, che stia la A alla C, come la B alla D.

Prendansi delle A, B gli equimoltiplici E, F, e delle C, D gli altri equimoltiplici qualunque G, H.

E perchè la E è tanto moltiplice della A, quanto la F della B, e le grandezze hanno l'una all'altra la medesima ragione, che i loro equimoltiplici (15.V.); perciò sarà la A alla B, come la E alla F. Ma come la A alla B, così sta la C alla D; adunque come la C alla D, così sta la E alla F (11. V.). Similmente poichè le G, H sono equimoltiplici delle C, D; sarà pure la C alla D, come la G alla H (15.V.). Ma come la C alla D, così sta la E alla F; laonde la E sta alla F, come la G alla H (11.V.). Or se quattro grandezze sono proporzionali, e la prima sia maggiore della terza, la seconda sarà maggiore della quarta; e se uguale, uguale; se minore, minore (14.V.): perciò se la E sia maggiore della G, anche la F sarà maggiore della H; e se uguale, uguale; se minore, minore. Ma le E, F sono equimoltiplici delle A, B, e le G, H sono pure qualunque altri equimoltiplici delle C, D. Adunque la A starà alla C, come la B alla D. (*d.*5.V.)

Quindi se quattro grandezze *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE D.

TEOREMA.

Se quattro grandezze sieno proporzionali, *invertendo* saranno anche proporzionali. (*v.n.*)

Sia la A alla B [*fig.D.*], come la C alla D: dico, che, *invertendo* debba stare la B alla A, come la D alla C.

Imperocchè si prendano delle A, C gli equimoltiplici E, G, e delle B, D gli altri equimoltiplici qualunque F, H.

E perchè la A sta alla B, come la C alla D; dovranno gli equimoltiplici E, G delle A, C accordarsi in superare, o in essere uguali, o minori degli equimoltiplici F, H delle B, D (*d.*5.V.). Adunque gli equimoltiplici F, H delle B, D si accorderanno pure o in esser minori, o uguali, o in superare gli equimoltiplici E, G delle A, C; e perciò dovrà stare la B alla A, come la D alla C (*d.*5.V.).

Laonde se quattro grandezze *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se le grandezze composte sieno proporzionali, *dividendo* saranno anche proporzionali.

Sieno proporzionali le grandezze composte AB, BE, CD, DF [*fig.17.*], e sia come la AB alla BE, così la CD alla DF: dico, che, *dividendo* sieno ancor proporzionali, cioè, che stia la AE alla EB, come la CF alla FD.

Si prendano delle AE, EB, CF, FD gli equimoltiplici GH, HK, LM, MN; e similmente delle EB, FD gli altri equimoltiplici qualunque KX, NP. Ed essendo la GH tanto molti-

plice della AE, quanto la HK della EB; sarà la GH tanto moltiplice della AE, quanto la GK della AB (1.V.) : è poi la GH tanto moltiplice della AE, quanto la LM della CF; adunque la GK è tanto moltiplice della AB, quanto la LM della CF. Similmente poichè la LM è tanto moltiplice della CF, quanto la MN della FD; sarà la LM tanto moltiplice della CF, quanto la LN della CD: ma era la LM tanto moltiplice della CF, quanto la GK della AB; adunque la GK sarà tanto moltiplice della AB, quanto la LN della CD; e perciò sono le GK, LN equimoltiplici delle AB, CD. Di nuovo perchè la HK è tanto moltiplice della EB, quanto la MN della FD, e la KX è pure tanto moltiplice della stessa EB, quanto la NP della stessa FD; sarà la composta HX tanto moltiplice della EB, quanto la composta MP è moltiplice della FD (2.V.). Per la qual cosa essendo la AB alla BE, come la CD alla DF, ed essendosi presi delle AB, CD gli equimoltiplici GK, LN, e delle EB, FD gli altri equimoltiplici qualunque HX, MP; però se la GK supera la HX, anche la LN supererà la MP; e se uguale, uguale; se minore, minore (*d*.5.V.). Adunque la GK superi la HX; tolta comune la HK, anche la GH supererà la KX: ma se la GK supera la HX, anche la LN supererà la MP; laonde la LN supera la MP, e però tolta comune la MN, anche la LM supererà la NP: che perciò se la GH supera la KX, anche la LM supererà la NP. Dimostreremo similmente, che se la GH sia eguale alla KX, la LM sia eguale alla NP; e se minore, minore; e sono le GH, LM equimoltiplici delle AE, CF, e le KX, NP sono altri equimoltiplici qualunque delle EB, FD; adunque come la AE alla EB, così starà la CF alla FD (*d*.5.V.)

Quindi se le grandezze composte *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se le grandezze divise sieno proporzionali, *componendo* saranno anche proporzionali. (*V.N.*)

Sieno proporzionali le grandezze diviso AE, EB, CF, FD [*fig. 18.*], e come la AE alla EB, così stia la CF alla FD: dico, che *componendo* sieno anche proporzionali, cioè, che stia la AB alla BE, come la CD alla DF.

Imperocchè se non sia la AB alla BE, come la CD alla DF; sarà la AB alla BE, come la CD ad una grandezza minore della DF, o ad una maggiore (*post.I.*V.). Sia in primo luogo ad una minore, come la DG. E poichè come la AB alla BE, così sta la CD alla DG; le quantità composte essendo proporzionali, anche dividendo saranno proporzionali (17. V.); adunque come la AE alla EB, così sta la CG alla GD: ma si è supposto essere la AE alla EB, come la CF alla FD; perciò come la CG alla GD così sta la CF alla FD (11.V.). Or queste grandezze sono omogenee, e la prima CG è maggiore della terza CF; onde anche la seconda DG sarà maggiore della quarta DF (14. V.): ma è minore, ch' è impossibile. Quindi non sta la AB alla BE, come la CD alla DG minore della DF. Similmente dimostreremo, che non può stare la AB alla BE, come la CD ad una grandezza maggiore della DF; e perciò necessariamente dovrà stare la AB alla BE, come la CD alla DF.

Adunque se le grandezze divise ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE E.

TEOREMA.

Se le grandezze composte sieno proporzionali, *convertendo* saranno anche proporzionali. (*V.N.*)

Sia la AB alla BE [*fig. E.*], come la CD alla DF: dico, che *convertendo* debba stare la AB alla AE, come la CD alla CF.

Imperocchè essendo la AB alla BE, come la CD alla DF, dividendo sarà la AE alla EB, come la CF alla FD (18.V.); ed invertendo si avrà la EB alla AE, come la FD alla CF (D.V.): che perciò componendo sarà la BA alla AE, come la DC alla CF (18.V.)

Adunque se le grandezze composte cc. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se sia come tutta a tutta, così qualche grandezza tolta dall' una a qualche grandezza tolta dall' altra; sarà pure la rimanente alla rimanente, come tutta a tutta. (*V.N.*)

Sia come tutta la AB [*fig.19.*] a tutta la CD, così la AE, che togliesi dalla AB alla CF tolta dalla CD: dico, che ancora la rimanente EB stia alla rimanente FD, come tutta la AB a tutta la CD.

Poichè come tutta la AB a tutta la CD, così sta la AE alla CF, sarà permutando la AB alla AE, come la CD alla CF (16.V.); ond'è, che convertendo sarà la AB alla BE, come la CD alla DF (E.V.), e di nuovo permutando sarà la

AB alla CD, come la BE alla DF; cioè la rimanente EB alla rimanente FD, come tutta la AB a tutta la CD.

Che perciò se sia come tutta a tutta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione ordinata con tre altre grandezze, e la prima sia maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta, e se uguale, uguale; se minore, minore. (*V.N.*)

Sieno le tre grandezze A, B, C [*fig.* *20.*] in proporzione ordinata con le altre tre D, E, F, cioè stia la A alla B, come la D alla E, e la B alla C, come la E alla F; e sia la A maggiore della C: dico, che ancora la D sia maggiore della F; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Perciocchè essendo la A maggiore della C, e la B un' altra grandezza qualunque, e la maggiore avendo ad una medesima maggior ragione, che la minore (8.V.), avrà la A alla B maggior ragione, che la C alla B. Ma come la D alla E, così sta la A alla B; adunque anche la D avrà alla E maggior ragione, che la C alla B (13. V.). Ed essendo la B alla C, come la E alla F, sarà invertendo la C alla B, come la F alla E (D.V): e perciò essendosi dimostrato, che stia la D alla E in maggior ragione della C alla B; dovrà anche stare la D alla E in maggior ragione della F alla E (*cor.13.V.*). Or di due grandezze, che hanno ragione ad una medesima, è maggiore quella, che ha a questa maggior ragione (10.V.); adunque la D è maggiore della F.

Che se la A sia uguale alla C; sarà pure la D uguale alla F.

Poichè essendo le A, C uguali, e la B un' altra grandezza qualunque, sarà la A alla B, come la C alla B (7.V.): ma è

poi la A alla B, come la D alla E, ed invertendo sta la C alla B, come la F alla E; onde la D sta alla E, come la F alla E (11.V.) ; e perciò la D è ugualo alla F (9.V.).

Sia finalmente la A minore della C; sarà anche la D minore della F.

Poichè essendo la A minore della C, sarà la C maggiore della A: ma per ipotesi, ed invertendo, la C sta alla B, come la F alla E (D. V.), ed è la B alla A, come la E alla D; adunque, *per lo caso primo*, essendo la C maggiore della A, sarà anche la F maggiore della D; e perciò la D minore della F.

Quindi se tre grandezze *ec.*— *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione perturbata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta; e se uguale, uguale; se minore minore. (*V.N.*)

Sieno le tre grandezze A, B, C [*fig.21.*] in proporzione pertnrbata con le tre altre D, E, F, cioè stia la A alla B, come la E alla F, e la B alla C, come la D alla E; e la A sia maggiore della C: dico, che la D sarà anche maggiore della F; e se nguale, uguale; se minore, minore.

Poichè la A è maggiore della C, e la B è un' altra grandezza; avrà la A alla B maggior ragione, che la C alla B (8.V.) : ma come la A alla B, così sta la E alla F; quindi anche la E avrà alla F maggior ragione, che la C alla B (13.V.). Ed essendo la B alla C, come la D alla E, sarà

invertendo la C alla B, come la E alla D (D.V.): e si è dimostrato, che la E ha alla F maggior ragione, che la C alla B; adunque avrà pure la E alla F maggior ragione, che la E alla D (*cor.*13.V.). Or quella grandezza è minore, cui una terza ha maggior ragione (10.V.); adunque la F è minore della D; e perciò la D sarà maggiore della F.

Sia adesso la A uguale alla C; sarà anche la D uguale alla F.

Imperocchè essendo la A uguale alla C, e la B una terza grandezza, starà la A alla B, come la C alla B (7. V.): ma la A sta alla B, come la E alla F, e la C alla B, come la E alla D; adunque la E sta alla F, come la E alla D (11.V.); e perciò la D è uguale alla F. (9.V.)

Sia in terzo luogo la A minore della C; sarà anche la D minore della F.

Poichè essendo la A minore della C, sarà la C maggiore della A. Or per ipotesi, ed invertendo, la C sta alla B, come la E alla D, e la B alla A, come la F alla E: ed è la C maggiore della A; quindi, *per lo caso primo,* sarà anche la F maggiore della D; e perciò la D minore della F.

Se dunque tre grandezze ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno in proporzione ordinata con altrettante; *per egualità* saranno ancora proporzionali. (*v.n.*)

Sieno primieramente le tre grandezze A,B,C[*fig.22.n.1.*] in proporzione ordinata con le tre altre D, E, F, cioè sia la A alla B, come la D alla E, e la B alla C, come la E alla F: dico, che stia anche la A alla C, come la D alla F.

Si prendano delle A, D gli equimoltiplici G, H, delle B,E gli altri equimoltiplici qualunque K, L, ed inoltre delle C, F gli equimoltiplici qualunque M, N. E poichè la A sta alla B, come la D alla E, e delle A, D si sono presi gli equimoltiplici qualunque G, H, e delle B, E gli altri qualunque equimoltiplici K, L; sarà la G alla K, come la H alla L, (4. V.); e per la stessa ragione dovrà stare la K alla M, come le L alla N. Laonde essendo le tre grandezze G, K, M in ordinata ragione con le altre tre H, L, N; per equalità, se la G è maggiore della M, anche la H sarà maggiore della N, e se uguale, uguale; se minore, minore (20.V.). Ma le G, H sono equimoltiplici delle A, D, e le M, N sono pure altri equimoltiplici qualunque delle C, F; adunque la A starà alla C, come la D alla F (*d*.5.V.).

Sieno inoltre le quattro grandezze A, B, C, D [*fig.22.n.2*] in proporzione ordinata con le altre quattro E, F, G, H, cioè, che la A stia alla B, come la E alla F; la B alla C, come la F alla G; e la C alla D, come la G alla H: dovrà stare ancora la A alla D, come la E alla H.

Imperocchè essendo le A, B, C tre grandezze in proporzione ordinata con le tre altre E, F, G; per egualità dovrà stare la A alla C, come la E alla G (*dim.pr.*): ma sta poi la

C alla D, come la G alla H; quindi di nuovo le tre grandezze A, C, D sono in ordinata ragione con le tre altre E, G, H ; e perciò , per egualità , dovrà stare la A alla D , come la E alla H . E così continuerebbesi a dimostrare se fosse un qualunque numero di grandezze.

Laonde se quante si vogliano grandezze ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno in proporzione perturbata con altrettante; *per egualità* saranno ancora proporzionali.

Primieramente sieno le tre grandezze A , B , C [*fig.* 23. *n.1.*] in proporzione perturbata con le tre altre D, E, F, cioè come la A alla B, così stia la E alla F, e come la B alla C , così la D alla E : dico , che come la A alla C , così stia la D alla F.

Imperocchè si prendano delle A , B , D gli equimoltiplici G, H, K, e delle C, E, F gli altri equimoltiplici qualunque L, M, N.

Ed essendo le G, H equimoltiplici delle A, B, e le grandezze serbandosi l' una all' altra la stessa ragione, che i loro equimoltiplici (15.V), sarà la A alla B, come la G alla H; e per la stessa ragione la E starà alla F, come la M alla N : ma come la A alla B , così sta la E alla F ; adunque anche la G starà alla H , come la M alla N (11. V.) . Or perchè come la B alla C, così sta la D alla E , e delle B, D si sono presi gli equimoltiplici H, K, delle C, E gli altri equimoltiplici qualunque L, M ; sarà la H alla L, come la K alla M (*cor.4.*V.) ; e si è dimostrato , che come la G alla H, così stia la M alla

N ; quindi essendo le tre grandezze G, H, L in proporzion e perturbata con le tre altre K, M, N, per egualità, se la G è maggiore della L, anche la K sarà maggiore della N ; se uguale, uguale ; se minore, minore (21.V.). Ma sono le G, K equimoltiplici delle A, D, e le L, N sono altri equimoltiplici qualunque delle C, F ; adunque come la A alla C, così sta la D alla F (*d*.5.V.).

Inoltre, sieno le quattro grandezze A, B, C, D [*fig*.23. *n*. 2.] in proporzione perturbata con le altre quattro E, F, G, H, cioè stia la A alla B, come la G alla H ; la B alla C, come la F alla G ; e la C alla D, come la E alla F : dico, che dovrà anche stare la A alla D, come la E alla H.

Imperocchè essendo le A, B, C tre grandezze in proporzione perturbata con le altre tre F, G, H, per egualità, dovrà stare la A alla C, come la F alla H (*dim.pr.*) : ma sta poi la C alla D, come la E alla F ; onde di nuovo le tre grandezze A, C, D sono in perturbata proporzione con le tre altre E, F, H, e quindi dovrà anche stare, per egualità, la A alla D, come la E alla H. E così si continuerebbe a dimostrare se fosse un qualunque numero di grandezze.

Laonde se quante grandezze si vogliano *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; ed abbia poi la quinta alla seconda la stessa ragione, che la sesta alla quarta: anche la prima insieme con la quinta avrà alla seconda la stessa ragione, che la terza insieme con la sesta alla quarta. (*V.N.*)

La prima AB [*fig.24.*] abbia alla seconda C la stessa ragione, che la terza DE alla quarta F; ed abbia poi la quinta BG alla seconda C la stessa ragione, che la sesta EH alla quarta F: dico che la AG composta dalla prima, e dalla quinta abbia pure alla seconda C la stessa ragione, che la DH composta dalla terza DE, e dalla sesta EH alla quarta F.

Poichè la BG sta alla C, come la EH alla F; invertendo sarà la C alla BG, come la F alla EH (D.V.): che però essendo la AB alla C, come la DE alla F, e la C alla BG, come la F alla EH; sarà, per egualità, la AB alla BG, come la DE alla EH (22.V.). Laonde essendo proporzionali queste grandezze divise, anche componendo saranno proporzionali (18.V.); cioè sarà la AG alla GB, come la DH alla HE. Ma è poi la BG alla C, come la EH alla F, adunque, di nuovo per egualità, la AG starà alla C; come la DH alla F.

Quindi se la prima abbia alla seconda *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se quattro grandezze sieno proporzionali; la massima di esse, e la minima saranno maggiori delle due rimanenti.

Sieno le quattro grandezze proporzionali AB, CD [*fig.25*], E, F, cioè la AB stia alla CD, come la E alla F, e la AB sia la massima di esse, e perciò F la minima (A.V.): dico, che le AB, F sieno maggiori delle CD, E.

Pongasi la AG uguale alla E, la CH uguale alla F.

Ed essendo la AB alla CD, come la E alla F, e la AG uguale alla E, la CH alla F; sarà pure la AB alla CD, come la AG alla CH. Che perciò essendo tutta la AB a tutta la CD, come la tolta AG alla tolta CH; anche la rimanente GB starà alla rimanente HD, come tutta la AB a tutta la CD (19.V.). Ma la AB è maggiore della CD; adunque anche la GB sarà maggiore della HD (A.V.). Laonde essendo la AG uguale alla E, e la CH alla F; saranno le AG, F uguali alle CH, E. Or aggiugnendo cose disuguali ad uguali, risultano cose disuguali (*ass. 4.*); adunque essendo disuguali le GB, HD, e la GB maggiore, se alla GB si aggiunga sì la AG, che la F, ed alla HD sì la CH, che la E; risulteranno le AB, F maggiori delle CD, E.

Quindi se quattro grandezze *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE F.

TEOREMA.

Se in due, o più analogie *, ove i termini delle prime ragioni sieno omogenei fra loro, e tali sien pure fra loro quelli delle seconde, gli antecedenti delle prime ragioni, o delle seconde sieno proporzionali a' conseguenti loro, o i primi antecedenti fosser proporzionali a' secondi, supponendoli ancor omogenei, o pure i primi conseguenti a' secondi; sarà la somma degli antecedenti delle prime ragioni a quella de' loro conseguenti, come la somma degli antecedenti delle seconde ragioni a quella de' conseguenti rispettivi.

Sieno le analogie A ad a, come P a p [*fig.F.*]; B a b, come Q a q; C a c, come R ad r ...; e sia primieramente A ad a, come B a b, come C a c ... o pure P a p, come Q a q, come R ad r ...: dico, che debba pur esser la somma degli antecedenti A, B, C ... a quella de' conseguenti loro a, b, c ..., come la somma degli altri antecedenti P, Q, R ... a quella de' conseguenti rispettivi p, q, r ...

Imperocchè essendo la ragione di A ad a uguale sì a quella di P a p, che all' altra di B a b; sarà ancora P a p, come B a b (11.V.): ma B sta a b, come Q a q; adunque sarà ancora P a p, come Q a q. E così dimostrandosi in seguito Q a q, come R ad r ... ne segue, che dal supporre gli antecedenti delle prime ragioni proporzionali a' conseguenti loro, debbano risultar eziandio quelli delle seconde ragioni propor

* Lo stesso, che *proporzioni.*

zionali a' loro conseguenti. E nel modo stesso si dimostrerebbe, che dall' essere gli antecedenti delle seconde ragioni proporzionali a' loro conseguenti, debbano risultar quelli delle prime ragioni proporzionali a' conseguenti rispettivi. Ciò posto, essendo A ad a, come B a b, come C a c . . . ; sarà la somma di tutti gli antecedenti A, B, C ... a quella di tutt' i conseguenti a, b, c . . . come un antecedente A ad un conseguente a (12.V); e quindi come P a p (11.V). Del pari essendo P a p, come Q a q, come R ad r ...; sarà la somma delle P, Q, R ... a quella delle p, q, r . . . come P a p. Adunque dovrà essere la somma delle A, B, C ... a quella delle a, b, c ... come la somma delle P, Q, R ... a quella delle p, q, r ... .

Che se, in secondo luogo, essendo omogenei i termini di tutte le analogie, suppongansi gli antecedenti delle prime A, B, C ... proporzionali a quelli delle seconde a, b, c ... ; dovranno anche i conseguenti delle prime analogie risultar proporzionali a quelli delle seconde.

Imperocchè essendo B a b, come Q a q, si ha, invertendo, b a B, come q a Q ; ed è pure, invertendo, B ad A, come Q a P, e per supposizione A ad a, come P a p. Adunque le grandezze b, B, A, a si troveranno corrispondere in proporzione ordinata con le altre q, Q, P, p ; e però starà, per egualità ordinata, b ad a, come q a p, ed invertendo a a b, come p a q. E così continuerebbesi a dimostrare in seguito per gli altri conseguenti. Laonde del pari, che nella parte prima si conchiuderà esser la somma delle A, B, C ... a quella delle a, b, c ... come la somma delle P, Q, R ... a quella delle p, q, r... E similmente se si fossero supposti proporzionali i conseguenti delle analogie proposte, se ne sarebbe derivata la proporzionalità degli antecedenti di esse, e per conseguenza la stessa poc' anzi indicata proporzione risultante.

Adunque se in due, o più analogie ec. — *C.B.D.*

Fine del quinto libro. (V.N.)

PRIMO SUPPLIMENTO

DELLA RAGION COMPOSTA (*r.n.*)

AVVERTIMENTO.

Tutte le volte, che si vorrà dinotare esser la ragione di M ad N composta dalle altre di A a B, C a D, E ad F .... si scriverà così M:N::(A:B)(C:D)(E:F).... E la seguente altra indicazione (M:N)(P:Q).... = (A:B)(C:D)(E:F).... dinoterà, che la ragione composta dalle prime sia quanto quella, che componesi dalle seconde.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Con qualunque ordine si compongano più ragioni, risulterà sempre la stessa ragion composta.

Cas. I. Se le componenti sieno due, ciò si rileva chiaramente dalle prop. 22, e 23. del lib. V.

Cas. II. Che se esse sieno tre, composte una volta con l'ordine seguente A a B, B a C, C a D [*fig. a.*], sicchè la ragion composta da esse sia quella di A a D(*d.*A.V.): dico, che a questa medesima ragione sarà anche uguale l'altra, che si compone dalle stesse tre ragioni col seguente ordine, A a B, C a D, B a C, o con qualunque altro ordine, che si ottiene prendendo quelle tre ragioni date in tutt'i modi possibili.

Imperocchè essendo C : D :: (B : D)(C : B), (*d.*A.V. *e cas.* 1.); combinandovi l'altra ragione di A a B, sarà la composta da questa, e da quella di C a D uguale alla composta dalle tre ragioni di A a B, B a D, C a B, cioè dal-

le due di A a D, C a B (*def.*A.V.); ond'è, che combinandovi finalmente la ragione di B a C, risulterà la composta dalle tre ragioni di A a B, C a D, B a C uguale alla composta dalle altre di A a D, C a B, B a C, o sia dalle due di A a D, C a C, ovvero dalle due di A a D, e di D a D, potendosi alla ragione di C a C, ch'è di uguaglianza, sostituire l'altra anche tale di D a D; cioè sarà quauto quella di A a D (*d.*A.V) E le altre combinazioni di questo caso ricadono nella già considerata, o nella supposta da prima, per mezzo del cas. 1.

Cas. III. Le ragioni componenti sieno qnattro, cioè le seguenti A a B, B a C, C a D, D ad E, la cui composta è la ragione di A ad E (*d.*A.V.); ed esse componganai un'altra volta coll'ordine seguente, cioè C a D, A a B, D ad E, B a C.

E poichè C : D :: (B : D) (C : B), (*d.*A.V. *e cas.1.*), si avrà combinandovi la ragione di A a B, la composta dalle ragioni di A a B, C a D uguale all'altra ragione, che componesi da quelle di A a B, B a D, C a B, o sia di A a D, C a B; e perciò sarà pure (C : D) (A : B) = (A : D) (C : B) (*cas.1.*). Laonde componendo di nuovo con ciascuna delle due precedenti l'altra ragione di D ad E, risulterà (C : D) (A : B) (D : E) = (A : D) (C : B) (D : E), cioè = (A : E) (C : B), (*d.*A.V. *e cas.2.*). Finalmente combinandovi anche la ragione di B a C; sarà (C : D) (A : B) (D : E) (B : C) = (A : E) (C : B) (B : C), cioè come A ad E.

E lo stesso dimostrandosi similmente per tutte le diverse altre combinazioni di questo caso, come anche per qualunque altro di più di quattro ragioni, che si compongano, rimane dimostrato ciò, che nella presente proposizione si è enunciato.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se due ragioni sieno inverse di due altre, ciascuna di ciascuna; la ragione composta dalle une sarà anche inversa della ragione, che componesi dalle altre.

Sieno le due ragioni di A a B, C a D [*fig. 6.*], inverse delle due altre di E ad F, G ad H, ciascuna di ciascuna, cioè stia A a B, come F ad E, e C a D, come H a G.

Si ponga come A a B, così K ad L(*post.l.V*), e come C a D, così L a M; sarà K ad M in ragion composta di K ad L, L ad M (*d.A.V.*), cioè di A a B, C a D. Inoltre si supponga essere G ad H, come O ad N, ed E ad F, come P ad O; sarà P ad N in ragion composta di P ad O, O ad N, cioè di E ad F, G ad H. E perchè A sta a B inversamente, come F ad E, ed A sta a B, come K ad L, F sta ad E, invertendo., come O a P; sarà K ad L, come O a P. Similmente si dimostrerà essere L ad M, come N ad O. Laonde, per egualità, dovrà stare K ad M, come N a P (23.V.). Ma la ragione di N a P è inversa dell' altra di P ad N, ch' è la ragione composta da quelle di E ad F, e di G ad H. Adunque questa ragione composta sarà inversa di quella di K ad M, cioè della ragione composta dalle ragioni di A a B, e di C a D.

Cor. E se le prime ragioni componenti fossero tre, o ancor più, inverse rispettivamente di altrettante; anche la prima ragion composta risulterà inversa della seconda.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una delle due componenti una ragione composta sia inversa dell' altra ; la composta sarà di uguaglianza . E se una ragione composta da due altre sia di uguaglianza ; l' una delle componenti sarà inversa dell' altra.

Part. I. Sieno due ragioni di A a B , C a D [*fig. c.*] , e questa seconda sia inversa della prima , cioè stia A a B , come D a C .

Suppongasi A : B, come E ad F (*post.I.V*), e C a D, come F a G ; sarà la ragione di E a G composta da quelle di A a B , C a D. Or poichè C sta a D , come F a G ; sarà invertendo G ad F , come D a C (D. V.) , cioè come A a B, o sia come E ad F. Laonde serbando ad F ugual ragione sì E, che G , sarà E uguale a G (9.V.) ; e perciò la ragione di E a G sarà di uguaglianza.

Part. II. Sia ora di uguaglianza la ragione, che componesi da quelle di A a B , C a D , e perciò , fatto lo stesso apparecchio di poo' anzi , risulterà E uguale a G ; e però starà E ad F , come G ad F . Ma E sta ad F , come A a B, ed invertendo , G sta ad F, come D a C. Adunque starà A a B, come D a C , cioè una delle componenti sarà inversa dell' altra — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una delle componenti una ragione composta sia uguale all' inversa di un' altra di esse; tal ragione composta sarà quanto quella, che si ottiene componendo le rimanenti.

Le ragioni componenti sieno quelle di A a B, C a D, E ad F, G ad H [*fig. d.*], fra le quali quella di A a B sia inversa dell' altra di C a D, cioè stia A a B, come D a C.

Si supponga essere A a B, come K ad L (*post.l.V.*), sarà C a D, come L ad un' altra grandezza M uguale a K. Sia poi E ad F, come M ad N, e G ad H, come N ad O; sarà la ragione di K ad O composta da tutte le ragioni date; e quella di M ad O sarà composta dalle stesse meno le due di A a B, C a D, che si eran supposte l' una inversa dell' altra. Ma essendo M uguale a K, sta M ad O, come K ad O. Adunque la composta da tutte le ragioni date è uguale alla composta dalle stesse meno le due l'una inversa dell'altra — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se in due ragioni componenti si scambiino fra loro gli antecedenti, o pure i conseguenti; la composta resterà sempre la stessa.

Sieno le ragioni di A a B, C a D [*fig. e.*], e fra i termini della prima si frapponga l' antecedente C della seconda, tra quelli della seconda l' antecedente A della prima;

sarà la ragione di A a B composta da quelle di A a C, C a B (*d.*A.V.) , e la ragione di C a D si comporrà da quelle di C ad A, A a D . Laonde la composta dalle due ragioni proposte sarà quanto la composta dalle ragioni di A a C, C a B, C ad A, A a D , cioè quanto la composta dalle ragioni di A a D, C a B, essendo la ragione di A a C inversa di quella di C ad A (*prop.4.*) : vale a dire , che scambiando gli antecedenti delle due ragioni componenti , la ragion composta non si muta .

E similmente frapponendo tra i termini A, B della prima ragione il conseguente D della seconda , e fra' termini C , D di questa il conseguente B della prima si dimostrerà , che scambiandosi gli antecedenti, la composta rimanga la stessa.

Adunque se in due ragioni , *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Ciascuna delle due componenti una ragione composta , è uguale a questa , componendovi l' inversa dell' altra componente .

Imperocchè essendo M : N :: (A : B) (B : C) , [*fig. f.*] ; e quindi come A a C ; sarà ancora (M : N) (C : B) :: (A : B) (B : C) (C : B) , cioè :: A : B. — *C.B.D.*

Cor. E perciò ancora ciascuna delle componenti una ragione sarà sempre quanto la composta da questa, e dalle rispettive inverse delle altre componenti .

SECONDO SUPPLIMENTO

DELLE RAGIONI DISUGUALI (*v. n.*)

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se la minore di due ragioni disuguali si voglia uguagliare alla maggiore alterando il suo conseguente, dovrà questo divenir minore; e se voglia alterarsi l' antecedente, dovrà questo farsi maggiore. Che se vogliasi al contrario rendere la maggiore uguale alla minore, bisognerà o renderne maggiore il conseguente, o pur minore l' antecedente.

Part. I. Sieno le due ragioni disuguali di AB a BC[*fig. g.*], e di DE ad EF, e quella di AB a BC la maggiore, e suppongasi esser AB a BC, come DE ad EG; sarà anche DE ad EG in maggior ragione di DE ad EF (13.V.), e quindi EG minore di EF (10.V.).

Che se poi si fosse supposto essere AB a BC, come HE a EF; si sarebbe rilevato essere HE ad EF in maggior ragione di DE ad EF(13.V.), e perciò HE maggiore di DE (10.V).

Part. II. Vogliasi ora uguagliare la ragion maggiore alla minore. Suppongasi essere DE ad EF, come AB a BK; sarà AB a BC in maggior ragione di AB a BK, e quindi BC minore di BK (10.V.). E similmente si dimostrerebbe, che supponendo essere DE ad EF, come LB a BC; sarà LB minore di AB.

Laonde ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se la prima di quattro grandezze omogenee stia alla seconda in maggior ragione, che la terza alla quarta; permutando avrà la prima alla terza maggior ragione, che la seconda alla quarta.

Sia AB a BC in maggior ragione di DE ad EF [*fig. h.*]: dico, che permutando starà AB a DE in maggior ragione di BC ad EF.

Imperocchè suppongasi essere AB a BC, come DE ad EG minore di EF (*prop.1.*), si avrà permutando AB a DE, come BC ad EG (16.V.). Ma BC sta ad EG in maggior ragione di BC ad EF (8.V.); laonde sarà pure AB a DE in maggior ragione di BC ad EF. (13.V.)

Che perciò se, *ec.* — *C.B.D.*

Similmente si dimostrerà, che: *Se una prima grandezza stia ad una seconda in minor ragione di una terza ad una quarta; permutando, la prima alla terza avrà minor ragione, che la seconda alla quarta.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una ragione sia maggiore di un' altra; l' inversa di quella sarà minore dell' inversa di questa.

Sia AB a BC in maggior ragione di DE ad EF [*fig. i.*]: dico, che invertendo starà CB a BA in minor ragione di FE ad ED.

Imperocchè suppongasi AB a BC, come DE ad EG minore di EF (*prop. 1.*); sarà invertendo CB a BA, come GE ad ED (D. V.). Ma essendo FE maggiore di GE, sta FE ad ED in maggior ragione di GE ad ED (8.V.). Adunque sarà pure FE ad ED in maggior ragione di CB a BA(13.V.) *C. B. D.*

Similmente si dimostrerà, che: *Se una ragione sia minore di un' altra; l' inversa di quella sia maggiore dell' inversa di questa.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una ragione sia maggiore di un' altra; la divisa della prima ragione, sarà anche maggiore della divisa della seconda.

Sia AB a BC [*fig. k.*] in maggior ragione di DE ad EF: dico, che dividendo dovrà essere AC a CB in maggior ragione di DF ad FE.

Suppongasi AB a BC, come GE ad EF, sarà GE maggiore di DE (*prop. 1.*); e si avrà dividendo AC a CF, come GF ad FE (17. V.). Ma GF sta ad FE in maggior ragione di DF ad FE (8.V.); quindi anche AC starà a CB in maggior ragione di DF ad FE (13. V.) — *C. B. D.*

Si dimostrerà similmente, che: *Se una ragione sia minore di un' altra; la divisa della prima ragione sarà anche minore della divisa della seconda.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una ragione sia maggiore di un' altra ; quella che risulta dalla prima per composizion di ragione, sarà anche maggiore dell' altra , che in simil modo risulta dalla seconda .

Stia AB a BC [*fig.l.*] in maggior ragione di DE ad EF : dico , che dovrà essere, componendo, AC a CB in maggior ragione di DF ad FE .

Suppongasi AB a BC , come GE ad EF ; sarà GE maggiore di DE (*prop.1.*) , e quindi GF maggiore di DF : ed è componendo AC a CB , come GF ad FE (18.V.), e GF ad FE in maggior ragione di DF ad FE (8. V.) ; onde anche AC starà a CB in maggior ragione di DF ad FE (13.V.). — *C. B. D.*

Similmente si dimostrerà, che : *Se una ragione sia minore di un' altra ; componendo risulterà la prima minore della seconda.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se una ragione sia maggiore di un'altra ; convertendo , la ragione, che si otterrà da quella sarà minore dell' altra , che risulta da questa.

Stia AB a BC [*fig. m.*] in maggior ragione di DE ad EF : dico , che dovrà , convertendo , essere AB ad AC in minor ragione di DE a DF.

Pongasi AB a BC, come DE ad EG minore di EF(*post.1*): e però DG maggiore di DF, ed ED a DF in maggior ragione di ED a DG (8.V.). Ma sta convertendo DE a DG, come BA ad AC; adunque ED sta a DF in maggior ragione di BA ad AC (13.V.): cioè al contrario AB ad AC in minor ragione di DE a DF. — *C. B. D.*

Similmente si dimostrerà, che: *Se una ragione sia minore di un' altra, convertendo risulterà la prima maggiore della seconda.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se tutta una grandezza stia a tutta un' altra in maggior ragione, che qualche parte dell'una a qualche parte dell' altra; starà il rimanente di quella al rimanente di questa in maggior ragione di tutta a tutta.

Abbia AB a DE [*fig. n.*] maggior ragione di BC ad EF: dico, che dovrà AC serbare a DF maggior ragione di AB a DE.

Essendo AB a DE in maggior ragione di BC ad EF; sarà, permutando, AB a BC in maggior ragione di DE ad EF (*prop.2*), e convertendo AB ad AC in minor ragione di DE a DF (*prop.6.*). Laonde di nuovo permutando avrà AB a DE minor ragione di AC a DF, cioè AC a DF avrà maggior ragione, che AB a DE. — *C.B.D.*

Similmente si dimostrerà, che: *Se stia tutta a tutta in minor ragione, che la tolta dall' una alla tolta dall' altra; debba essere la rimanente alla rimanente in minor ragione di tutta a tutta.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno in ordinata maggior ragione con altrettante; per egualità ordinata, la prima delle prime starà all' ultima di esse in maggior ragione, che la prima delle seconde all' ultima.

Le grandezze A, B, C, D [*fig.p.*] sieno in ordinata maggior ragione con altrettante E, F, G, H, cioè stia A a B in maggior ragione di E ad F, B a C in maggior ragione di F a G, C a D in maggior ragione di G ad H, e così sempre: dico, che dovrà anche essere A a D in maggior ragione di E ad H.

Poichè A a B sta in maggior ragione di E ad F; ponendo essere A a B, come E a K, sarà K minore di F (*prop.1.*). Pongasi K ad L, come B a C, ed essendo B a C in maggior ragione di F a G, sarà eziandio K ad L in maggior ragione di F a G (13.V.). Or se questa ragione di K ad L si volesse uguagliare all' altra di F a G, dovrebbe il conseguente L farsi maggiore (*prop. 1.*); ma tuttavia sarebbe minore di G (A.V.); che però tanto più sarà L minore di G; e quindi sarà E ad L in maggior ragione di E a G (8.V.). Ma per essere le tre grandezze A, B, C in ordinata egual ragione con le altre tre E, K, L, sta A a C, come E ad L (22. V.); ed è E ad L in maggior ragione di E a G. Adunque starà ancora A a C in maggior ragione di E a G. (13.V.).

E di nuovo essendo A a C in maggior ragione di E a G, e C a D in maggior ragione di G ad H, si conchinderà similmente essere A a D in maggior ragione di E ad H. E lo stesso in appresso — *C. B. D.*

In simil guisa si dimostrerà, che: *Se quante grandezze si vogliano sieno in ordinata ragione minore con altrettante; per egualità ordinata, la prima delle prime starà all'ultima di esse in minor ragione, che la prima delle seconde all' ultima corrispondente.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno in perturbata ragione maggiore con altrettante; per egualità perturbata, dovrà stare la prima delle prime all'ultima in maggior ragione, che la prima delle seconde all' ultima.

Sieno le grandezze A, B, C, D [*fig.q.*] in perturbata maggior ragione con le altrettante E, F, G, H, cioè stia A a B in maggior ragione di G ad H, B a C in maggior ragione di F a G, C a D in maggior ragione di E ad F, e così sempre: dico, che debba stare A a D in maggior ragione di E ad H.

Poichè ponendo essere A a B, come K ad H, sarà K maggiore di G (*prop.1.*). Pongasi L a K, come B a C, e però in maggior ragione di F a G (13.V.); ond'è, che siccome volendosi uguagliare la ragione di F a G a quella di L a K, conservando il conseguente G, l'antecedente dovrebbe divenir maggiore (*prop.1.*). essendo però minore di L (A.V.), così tanto più sarà L maggiore di F; ed avrà L ad H maggior ragione di F ad H. Ma per essere le tre grandezze A, B, C in perturbata egual ragione con le altrettante L, K, H sta A a C, come L ad H. Adunque sarà pure A a C in maggior ragione di F ad H. E poichè sta C a D in maggior ragione di E ad F, si avrà di nuovo A a D in maggior ragione di E ad H. E così in appresso — *C. B. D.*

Nel modo stesso si dimostrerà, che : *Se quante grandezze si vogliano sieno in perturbata ragione minore con altrettante; per egualità perturbata, la prima delle prime starà all' ultima di esse in minor ragione della prima delle seconde all' ultima.*

Scol. Da questo teorema, e dal precedente combinato con la definizione della ragion composta (*d.*A.V.) si rileva facilmente, che : *Se abbiansi più ragioni rispettivamente maggiori, o pur minori di altrettante; la composta dalle prime risulterà anche maggiore nel primo caso, minore nel secondo della composta dalle altre.*

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Sieno quante grandezze si vogliano, e la prima di esse stia alla seconda in maggior ragione della terza alla quarta, e questa ragione sia poi maggiore di quella della quinta alla sesta, e così sempre : staranno tutte le grandezze, che fanno da antecedenti a tutte le altre, che fanno da conseguenti in maggior ragione dell' ultima delle prime all'ultima delle seconde; in minore poi di quella, che serba la prima delle prime alla prima delle seconde.

Abbia AB a BC [*fig.r.*] in maggior ragione di DE ad EF, e questa ragione di DE ad EF poi sia maggiore dell'altra di GH ad HK : dico, che dovranno stare le AB, DE, GH, prese insieme, alle BC, EF, HK, anche insieme prese, in maggior ragione di GK ad HK; in minore poi di AB a BC.

Imperocchè essendo AB a BC in maggior ragione di DE ad EF, sarà permutando AB a DE in maggior ragione di BC ad EF (*prop.2.*), e componendo AB con DE a DE in mag-

gior ragione di BC con EF ad EF (*prop.* 5.), e di nuovo permutando avrà AB più DE a BC più DF maggior ragione di DE ad EF: che però essendo DE ad EF in maggior ragione di GH ad HK; sarà eziandio AB più DE a BC più EF in maggior ragione di GH ad HK *, e di nuovo permutando, e poi componendo, si avrà AB più DE più GH a GH in maggior ragione di EC più EF più HK ad HK. Laonde permutando sarà AB più DE più GH a BC più EF più HK in maggior ragione di GH ad HK. Lo che dovevasi in primo luogo dimostrare.

Pongansi ora LE ad EF, ed MH ad HK, come AB a BC; sarà ciascuna delle LE, MH maggiore di ciascuna delle DE, GH (*prop.1.*). Ed essendo AB a BC, come LE ad EF, e come MH ad HK; sarà AB più LE più MH a BC più EF più HK, come AB a BC (12.V.). Ma AB più LE più MH sta a BC più EF più HK in maggior ragione di AB più DE più GH a BC più EF più HK (8.V.). Laonde sarà pure AB a BC in maggior ragione di AB più DE più GH a BC più EF più HK (13.V.). Lo che doveva dimostrarsi in secondo luogo.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Se una prima grandezza abbia ad una seconda maggior ragione, che una terza ad una quarta, ed abbia poi una quinta grandezza alla seconda maggior ragione, che una sesta alla quarta; anche la prima insieme con la quinta avrà alla seconda maggior ragione, che la terza insieme con la sesta alla quarta.

* Ciò è facile a rilevarsi dalla prop. 13. V.

Abbia AB prima [*fig.s.*] a C seconda maggior ragione di DE terza ad F quarta, e BG quinta a C seconda maggior ragione di EK sesta ad F quarta: dico, che dovrà stare AG a C in maggior ragione di DH ad F.

Essendo BG a C in maggior ragione di EH ad F, sarà, invertendo, C a BG in minor ragione di F ad EH (*prop.3.*). Pongasi perciò C a BG, come F ad EK maggiore di EH (*prop. 1.*); sarà, permutando, C ad F, come BG ad EK (16.V.). E perchè sta AB a C in maggior ragione di DE ad F, avrà, permutando, AB a DE maggior ragione di C ad F (*pr.2.*), e quindi di BG ad EK, la qual ragione è uguale all' altra di C ad F (*cor.*13.V.): che però, di nuovo permutando, si avrà AB a BG in maggior ragione di DE ad EK; e componendo AG a GB in maggior ragione di DK a KE (*prop. 5.*). Laonde permutando sarà AG a DK in maggior ragiono di GB a KE, e quindi essendo la ragione di AG a DH maggiore di quella di AG a DK (8.V.), lo sarà tanto più dell' altra di GB a KE, o dell' uguale di C ad F: e di nuovo permutando starà AG a C in maggior ragione di DH ad F. —*C. B. D.*

Similmente si dimostrerà, che: *Se una prima grandezza abbia ad una seconda minor ragione, che una terza ad una quarta; ed abbia poi una quinta alla seconda minor ragione, che una sesta alla quarta; la composta dalla prima, e quinta avrà alla seconda minor ragione, che la composta dalla terza, e sesta alla quarta.*

Fine de' supplimenti al Libro V.

IL SESTO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. Figure rettilinee *simili* sono quelle, che hanno gli angoli uguali l'uno, all' altro, e proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali.

II. Quattro grandezze si diranno *reciprocamente proporzionali*, se i termini estremi della proporzione da esse costituita esistano in una figura, ed i termini medj in un' altra. (*v.n.*)

III. Una linea retta dicesi segata in *estrema, e media ragione*; quando stia tutta la linea retta alla porzione maggiore, come questa alla minore.

IV. *Altezza* di una qualche figura è la perpendicolare, che dal vertice di essa tirisi alla base.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

Sieno i triangoli ABC, ACD [*fig.1.*], ed i parallelogrammi EC, CF, che abbiano la medesima altezza, cioè la perpendicolare dal punto A tirata alla BD (*def.4.*): dico, che

come la base BC, alla base CD, così stia il triangolo ABC al triangolo ACD, ed il parallelogrammo EC all' altro CF.

Imperocchè si prolunghi BD dall' una, e l'altra parte verso H, L, e si pongano uguali alla base BC qnante si vogliano BG, GH, ed alla base CD, qnante altre ne piaccia DK, KL; indi giungansi AG, AH, AK, AL.

Ed essendo le CB, BG, GH uguali fra loro; saranno anche uguali i triangoli AHG, AGB, ABC (38.I.); e perciò qnanto è moltiplice la base HC della base BC, altrettanto il triangolo AHC è moltiplice del triangolo ABC. Per la stessa ragione qnanto è moltiplice la base LC della base CD, tanto l' è il triangolo ALC del triangolo ACD. Or se la base HC è uguale alla base CL, anche il triangolo AHC sarà uguale al triangolo ALC; se la base HC è maggiore della base CL, anche il triangolo AHC sarà maggiore dell'altro ALC; e se minore, minore: perciò avremo quattro grandezze, cioè le dne basi BC, CD, ed i dne triangoli ABC, ACD, e si sono presi gli ugualmente moltipliei della base BC, e del triangolo ABC, cioè la base HC, ed il triangolo AHC; e della base CD, e del triangolo ACD si sono presi anche gli altri ugualmente moltipliei qualunque, cioè la base CL, ed il triangolo ALC; e si è dimostrato, che se la base HC è maggiore della base CL, il triangolo AHC debba pur essere maggiore del triangolo ALC, e se uguale, nguale; se minore, minore. Adunque dovrà stare la base BC alla base CD, come il triangolo ABC al triangolo ACD (*d*.5.V.).

Or del triangolo ABC n'è doppio il parallelogrammo EC, e dell'altro triangolo ACD n'è doppio il parallelogrammo FC (34. I.), e le parti hanno l'una all' altra la stessa ragione, che i loro ugualmente moltiplici (15.V.); quindi come il triangolo ABC al triangolo ACD, così starà il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF. Laonde essendosi dimostrato, che stia come la base BC alla base CD, così li rtiangolo ABC

al triangolo ADC, e come quel triangolo a questo, così il parallelogrammo EC all' altro CF ; sarà pure come la base BC alla base CD , così il parallelogrammo EC all' altro CF . (11. V.) .

Per la qual cosa i triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se nel triangolo sia tirata una linea retta parallela ad un lato ; questa dividerà proporzionalmente gli altri due lati del triangolo ; e se due lati del triangolo sieno proporzionalmente divisi ; la linea retta, che unisce le sezioni , sarà parallela all' altro lato del triangolo. *(V.N.)*

Si tiri ad un lato BC [*fig. 2.*] del triangolo ABC la parallela DE : dico, che come BD a DA, così stia CE ad EA.

Giungansi le BE , CD ; sarà il triangolo BED uguale all' altro CDE , poichè sono nella medesima base DE , e fra le stesse parallele DE, BC (37.I.) : è poi ADE un altro triangolo, e le grandezze uguali hanno la stessa ragione ad una medesima (7. V.) ; adunque come il triangolo BDE al triangolo ADE , così sta il triangolo CDE allo stesso ADE. Ma il triangolo BDE sta al triangolo ADE, come BD a DA, poichè avendo essi la stess' altezza , cioè la perpendicolare dal punto E tirata alla AB (*def.4.*), sono fra loro come le basi (1.VI); e per la medesima ragione il triangolo CDE sta all'altro ADE , come CE ad EA : quindi come BD a DA, così sta CE ad EA (11.V.).

Sieno ora divisi proporzionalmente i lati AB , AC del tri-

angolo ABC, cioè stia come BD a DA, così CE ad EA, e giungasi DE : dico, che DE sia parallela a BC.

Fatta la stessa costruzione : poichè BD sta a DA, come CE ad EA, e come BD a DA, così sta il triangolo BDE all'altro ADE (1.VI.), come CE ad EA, così sta il triangolo CDE al triangolo ADE ; sarà il triangolo CDE al triangolo ADE, come il triangolo BDE allo stesso ADE. Per la qual cosa serbando ciascuno de' triangoli BDE, CDE la stessa ragione al triangolo ADE ; sarà il triangolo BDE uguale al triangolo CDE (9.V.). Ma sono nella medesima base DE, ed i triangoli uguali costituiti sopra la base stessa, sono anche fra le medesime parallele (39.I.) ; adunque DE è parallela a BC.

E perciò se nel triangolo sia tirata *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se un angolo del triangolo sia diviso per metà, e la linea retta che divide l' angolo seghi ancor la base ; i segmenti della base avranno la stessa ragiona, che gli altri lati del triangolo : e se i segmenti della base abbiano la stessa ragione, che gli altri lati del triangolo ; la linea retta, che si tira dal vertice alla sezione, dividerà per metà l' angolo del triangolo. (*V. N.*)

Sia il triangolo ABC [*fig. 3.*], e l' angolo BAC si divida per metà con la linea retta AD : dico, che come BD a DC, così stia BA ad AC.

Per lo punto C si tiri la CE parallela alla DA, che concorra con la BA prolungata nel punto E.

E poichè nelle parallele AD, EC cade la linea retta AC; sarà l' angolo ACE uguale all' angolo CAD (29.I.) : ma si pone l' angolo CAD uguale all'angolo BAD; quindi sarà pure l'angolo BAD uguale all' altro ACE. Similmente, poichè nelle parallele AD, EC cade la linea retta BAE; sarà l' angolo esteriore BAD uguale all' interiore, ed opposto AEC (29. I.) : ma si è dimostrato l' angolo ACE uguale all' angolo BAD; adunque sarà l' angolo ACE uguale all'altro AEC, e perciò il lato EA è uguale al lato AC (6.I.). Or perchè ad un lato del triangolo BCE, cioè ad EC, si è tirata la parallela AD; sarà come BD a DC, così BA ad AE (2.VI.) : ed è AE uguale ad AC; quindi come BD a DC, così sta BA ad AC (7.V.).

Sia ora BD a DC, come BA ad AC, e giungasi AD : dico, che l'angolo BAC sia diviso per metà dalla linea retta AD.

Imperocchè, fatta la stessa costruzione, BD sta a DC, come BA ad AC; e come BD a DC, così sta pure BA ad AE, mentre ad un de'lati del triangolo BCE, cioè ad EC, si è tirata la parallela AD (2.VI.); perciò sarà BA ad AC, come BA ad AE : quindi AC è uguale ad AE (9.V.), e perciò l' angolo AEC è uguale all' angolo ACE (6. I.). Ma l' angolo AEC è uguale all'angolo esteriore BAD, e l'angolo ACE è uguale all' alterno CAD (29. I.); laonde sarà l' angolo BAD uguale all' altro CAD : e però l' angolo BAC è diviso per metà dalla linea retta AD.

Se dunque un angolo del triangolo cc.—*C.B.D.* (*r.n.*)

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Ne'triangoli equiangoli, i lati d'intorno agli angoli uguali sono proporzionali fra loro; e sono omologhi que' lati, che sottendono angoli uguali.

Sieno i triangoli equiangoli ABC, DCE [*fig.4.*], i quali abbiano l' angolo ABC uguale all'angolo DCE, l'angolo ACB all' altro DEC, e l'angolo BAC all'angolo CDE: dico, che sieno proporzionali i lati de'triangoli ABC, DCE, che sono intorno agli angoli uguali, ed omologhi que' lati, che sottendono angoli uguali.

Si ponga BC per diritto con CE. Ed essendo gli angoli ABC,ACB minori di due retti (17.I.),e l'angolo ACB uguale all'angolo DEC; perciò saranno anche gli angoli ABC,DEC minori di due retti: quindi le BA, ED prolungate s'incontreranno (*post.6.*). Si prolunghino, e s'incontrino nel punto F.

Ed essendo l' angolo DCE uguale all' angolo ABC; sarà BF parallela a DC (38.I.). Similmente poichè l'angolo ACB è uguale all' angolo DEC; sarà AC parallela ad EF. Laonde FACD è parallelogrammo; e perciò FA è uguale a CD, ed AC ad FD (34.I.). Or essendosi tirata all'un de' lati del triangolo FBE, cioè ad EF, la parallela AC; sarà BA ad AF, come BC a CE (3. VI.): ma la AF è uguale alla CD; adunque BA sta a CD, come BC a CE (7.V.), e permutando starà AB a BC, come DC e CE. Nel modo stesso, poichè CD è parallela a BF; sarà BC a CE, come FD a DE: ma DF è uguale ad AC; adunque come BC a CE, così sta AC ad ED, e permutando starà BC a CA, come CE ad ED. Laonde essendosi dimostrato, che stia AB a BC, come DC a CE, e BC a CA, come CE ad ED, per egualità, starà AB ad AC, come CD a DE (22.V.).

E perciò ne' triangoli equiangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali; saranno ancora equiangoli, ed avranno uguali gli angoli, che sono sottesi da' lati omologhi.

Sieno i due triangoli ABC, DEF [*fig.5.*], i quali abbiano i lati proporzionali, e sia come AB a BC, così DE ad EF, come BC a CA, così EF ad FD, e perciò, per egualità, come AB ad AC, così ED a DF: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF; ed essere uguali gli angoli, che sono sottesi da' lati omologhi, cioè l' angolo ABC all' angolo DEF, l' angolo BCA all' angolo EFD, ed inoltre l' angolo BAC all'angolo EDF.

Imperocchè costituiscansi alla linea retta EF, ed a'punti E, F in essa, l' angolo FEG uguale all' angolo ABC, e l'angolo EFG uguale all' altro BCA (23.I.); sarà il terzo angolo BAC uguale al terzo angolo EGF (32.I.). Perciò il triangolo ABC è eqniangolo all' altro EGF; e quindi hanno proporzionali i lati, che sottendono angoli ugnali (4.VI.). Adunque AB sta BC, come GE ad EF: ma come AB a BC, così sta pure DE ad EF; adunqne sarà DE ad EF, come GE ad EF (11.V.). Laonde avendo sì DE, che EG la stessa ragione ad EF; sarà DE uguale ad EG (9.V.). Per la medesima ragione anche DF è uguale ad FG: che però essendo DE uguale ad EG, ed EF comune, le due DE, EF sono uguali alle due EG, EF, e la base DF è uguale alla base FG; quindi l'angolo DEF è uguale all'angolo GEF, il triangolo DEF è uguale al triangolo GEF, ed i rimanenti angoli sono uguali a' rimanenti angoli, l' uno all' altro, quelli, che sono sottesi da' lati uguali (8.I.). Adunque l' angolo DFE è uguale all' angolo GFE, e l' angolo EDF all' angolo EGF. Ed es-

sendo l'angolo DEF uguale all'angolo GEF, e l'angolo GEF all'angolo ABC; sarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF. Per la stessa ragione l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE; e quindi anche l'angolo in A è uguale a quello in D (32.I.): laonde il triangolo ABC sarà equiangolo all'altro DEF.

Adunque se due triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali; saranno equiangoli i triangoli, ed avranno uguali gli angoli, che sono sottesi da' lati omologhi.

Sieno due triangoli ABC, DEF [*fig.6.*], i quali abbiano un angolo BAC uguale ad un altro angolo EDF, e proporzionali i lati d'intorno a questi angoli uguali, cioè BA ad AC, come ED a DF: dico essere il triangolo ABC equiangolo al triangolo DEF, e che l'angolo ABC sia uguale all'angolo DEF, e l'altro ACB all'altro DFE.

Si costituiscano alla linea retta DF, ne' punti D, F in essa, l'angolo FDG uguale all'angolo BAC, o EDF, e l'angolo DFG uguale all'altro ACB (23. 1.); sarà il rimanente angolo in B uguale al rimanente in G (32.I.). Quindi il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DGF; e perciò sta BA ad AC, come GD a DF (4.VI.). Ma si è supposto, che come BA ad AC, così stia ED a DF; adunque ED sta a DF, come GD a DF (11.V.); che però essendo ED uguale a DG (9.V.), e DF comune; le due ED, DF sono uguali alle due GD, DF, l'una all'altra, l'angolo EDF è pure uguale all'an-

golo GDF ; adunque la base EF è uguale alla base FG, il triangolo EDF è nguale al triangolo GDF , ed i rimanenti angoli sono uguali a' rimanenti angoli , l' uno all' altro , quelli , che sono sottesi da' lati uguali (4. I.). Laonde l' angolo DFG è uguale all' angolo DFE, e l'angolo in G all' angolo in E : ed è l' angolo DFG uguale all' angolo ACB ; perciò anche l' angolo ACB è nguale all' angolo DFE . Si è snpposto esser l' angolo BAC uguale all' angolo EDF ; quindi il rimanente angolo in B sarà ugnale al rimanente in E : e perciò il triangolo ABC è eqniangolo all' altro DEF.

Adunque se due triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo , proporzionali i lati d' intorno a due altri angoli , e de' rimanenti angoli ciascuno o non maggiore del retto , o pur non minore ; i triangoli saranno equiangoli, ed avranno uguali gli angoli d'intorno a' quali sono i lati proporzionali.(*V.N.*)

Sieno i due triangoli ABC , DEF [*fig.7.*], che abbiano un angolo uguale ad nn angolo , cioè l' angolo BAC ugualo all' angolo EDF , e sieno proporzionali i lati d' intorno agli altri angoli ABC, DEF, tal che stia AB a BC, come DE ad EF, e de' rimanenti, che sono in C, ed in F , sia primieramente ciascuno non maggiore del retto : dico essere il triangolo ABC equiangolo all' altro DEF , e l' angolo ABC uguale all' angolo DEF ; ed il rimanente, cioè quello in C uguale al rimanente in F.

Imperocchè se l' angolo ABC non sia uguale all' angolo DEF, l' un di essi sarà maggiore : sia questo l' angolo ABC,

che però dovrà il rimanente angolo ACB esser minore del rimanente DFE, e quindi necessariamente minore del retto. Costituiscasi alla linea retta AB, nel punto B in essa, l'angolo ABG uguale all'angolo DEF (23.I.).

Ed essendo l'angolo in A uguale a quello in D, e l'angolo ABG uguale all' angolo DEF; sarà il rimanente angolo AGB uguale al rimanente DFE (32. I.); quindi il triangolo ABG sarà equiangolo al triangolo DEF, e dovrà stare AB a BG, come DE ad EF (4.VI.).Ma come DE ad EF, così si è supposto essere AB a BC; adunque come AB a BC, così sta AB a BG (11.V.): che però la AB serbando a ciascuna delle BG, BC la stessa ragione, sarà BC uguale a BG (9. V.). Quindi l'angolo BGC sarà uguale all'angolo BCG (5. I.), e perciò BGC al pari di BCG dovrà esser minore del retto; ond'è, che l'altro angolo BGA conseguente di BGC sarà maggiore del retto (13. I.): e si è dimostrato l' angolo BGA uguale a quello ch' è in F; adunque quest' angolo in F sarà pure maggiore del retto; lo che ripugna alla supposizione fatta, essendosi esso posto non maggiore del retto. Non è dunque l' angolo ABC disuguale all' angolo DEF; che però gli è uguale: è pure l' angolo in A nguale a quello in D; laonde il rimanente in C è uguale al rimanente in F; e perciò il triangolo ABC è equiangolo all' altro DEF.

Che se ciascuno degli angoli in C, ed in F si supponga non minore del retto: dico similmente, che debba il triangolo ABC essere equiangolo all' altro DEF.

Poichè fatta la stessa costruzione,dimostreremo similmente che BC sia uguale a BG, e l'angolo in C ugnale all'angolo BGC: quindi due angoli del triangolo BGC non sono minori di due retti; ch' è impossibile (17. I.). Adunque l'angolo ABC non è disuguale all' angolo DEF, ma gli è necessariamente uguale; e perciò risulterà, come nel caso precedente, il triangolo BAC equiangolo all'altro DEF.

Laonde se due triangoli abbiano un angolo *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto si tiri la perpendicolare alla base; i triangoli adjacenti alla perpendicolare sono simili ed a tutto il triangolo, e fra loro.

Sia il triangolo rettangolo ABC [*fig. 8.*], che ha retto l'angolo BAC, e dal punto A si tiri alla AC la perpendicolare AD: dico, che i triangoli ABD, ADC sieno simili ed a tutto il triangolo ABC, e fra loro.

Poichè l' angolo BAC è uguale all' angolo ADB, essendo retto si l' uno, che l'altro, e l' angolo in B è comnne a'due triangoli ABC, ABD; sarà il rimanente angolo ACB uguale al rimanente angolo BAD (32.I): quindi il triangolo ABC è eqniangolo all' altro ABD; e perciò avranno proporzionali i lati d' intorno gli angoli uguali (4. VI.), e saranno simili. Della stessa maniera si dimostrerà, che il triangolo ADC sia simile all'altro ABC. Adunque ciascuno de' triangoli ABD, ADC è simile a tutto il triangolo ABC.

Dico di più, che i triangoli ABD, ADC sieno anche simili fra loro.

Poichè l' angolo retto BDA è nguale al retto ADC, e si è dimostrato l' angolo BAD uguale all' angolo in C; sarà il rimanente angolo in B nguale al rimanente DAC: laonde il triangolo ABD è equiangolo, e perciò simile al triangolo ADC (4.VI.).

Quindi se nel triangolo rettangolo ec. — *C.B.D.*

Cor. È chiaro da ciò, che: *Nel triangolo rettangolo, la perpendicolare, che dall' angolo retto si tira alla base, è media proporzionale tra i segmenti della base: ed inoltre, che*

ciascun lato è medio proporzionale tra la base, ed il segmento ad esso contermine.

Poichè ne' triangoli equiangoli BDA, ADC, sta BD a DA, come DA a DC (4.VI.) : negli altri triangoli equiangoli ABC, DBA, sta BC a BA, come BA a BD ; e finalmente ne' triangoli eqniangoli ABC, DAC, CB sta a CA, come CA : CD.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Tagliare da una linea retta data la parte, che si dimanda.

Sia data la linea retta AB [*fig.9.*] ; fa d' uopo tagliare da essa la parte, che si dimanda.

Dal punto A si tiri la linea retta AC, la quale comprenda con la AB nn angolo qualunque ; poi prendasi in AC qualsivoglia punto D, ed indi sulla stessa AC si prenda la DE uguale alla AD, la EC nguale alla DE, e così successivamente, finchè tntte queste AD,DE,EC prese insieme, cioè la AC sia tanto moltiplice della AD, qnanto la AB è moltiplice della parte, che si vuol tagliare da essa : finalmente giungasi la BC, alla qnale si tiri per D la parallela DF.

E perchè si è tirata la parallela DF ad un lato BC del triangolo ABC ; sarà come CD a DA, così BF ad FA (2.VI), e componendo, come CA ad AD, così BA ad AF (18.V.). Ma CA è moltiplice di AD ; adunque BA è ugualmente moltiplice di AF (C. V.) ; e perciò qualunque parte è AD di AC, la stessa parte sarà AF di AB : laonde AF è la parte, che si dovea tagliare dalla linea retta AB.

Quindi dalla data linea retta AB si è tagliata la parte cercata AF. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE X.

POOBLEMA.

Data una linea retta non divisa, dividerla similmente ad altra linea retta divisa.

Sia data la linea retta non divisa AB [*fig.10.*] , e la divisa AC ; fa d'uopo dividere la linea retta non divisa AB similmente alla divisa AC.

Sia AC divisa ne'punti D, E, e si dispongano le linee rette date ad angolo qualunque ; indi giungasi BC, e per gli punti D, E si tirino le DF, EG parallele alla BC (31. I.) , e per D si tiri DHK parallela alla AB.

È dunque parallelogrammo ciascuna delle figure FH,HB ; e perciò DH è uguale ad FG, HK a GB (34.I.). Or essendosi ad un lato del triangolo DKC, cioè a KC, tirata la parallela HE ; sarà come CE ad ED, così KH ad HD (2.VI.): ma KH è uguale a BG, ed HD a GF ; adunque come CE ad ED, così sta BG a GF. Similmente essendosi ad un lato del triangolo AGE, cioè ad EG, tirata la parallela FD ; starà come ED a DA, così GF ad FA : e si è dimostrato, che come CE ad ED, così stia BG a GF, e come ED a DA, così è pure GF ad FA.

Quindi la data linea retta non divisa AB si è divisa similmente all'altra linea retta divisa AC. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare la terza proporzionale.

Sieno date le due linee rette AB, AC [*fig.11.*], le quali dispongasi in modo, che contengano un angolo qualunque; fa d' uopo trovare la terza proporzionale ad esse AB, AC.

Si prolunghino le AB, AC ne' punti D, E; indi pongasi BD uguale ad AC, ed unita BC, per D si tiri DE parallela a BC (31. I.).

E poichè ad un lato del triangolo ADE, cioè a DE, si è tirata la parallela BC; sarà AB a BD, come AC a CE(2.VI): ma BD è uguale ad AC; adunque AB starà ad AC, come AC a CE.

E perciò date due linee rette AB, AC si è trovata la terza proporzionale CE. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Date tre linee rette, trovare la quarta proporzionale.

Sieno date le tre linee rette A, B, C [*fig.12.*]; fa d'uopo trovare la quarta proporzionale ad esse A, B, C.

Si espongano due linee rette DE, DF in modo, che contengano un qualunque angolo EDF, e si ponga DG uguale ad A, GE uguale a B, DH uguale a C; indi congiunta la GH, si tiri per E la EF parallela ad essa.

E perchè ad un lato del triangolo DEF, cioè ad EF, si è tirata la parallela GH; sarà DG a GE, come DH ad HF(2.VI): ma DG è uguale ad A, GE è uguale a B, DH è uguale a C; adunque starà A a B, come C ad HF.

E perciò date tre linee rette A, B, C, si è trovata la quarta proporzionale HF. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare la media proporzionale.

Sieno date le due linee rette AB, BC [*fig 13.*]; fa d'uopo trovare tra esse la media proporzionale.

Pongansi per diritto, e sopra la AC si descriva il semicerchio ADC; dal punto B si tiri la BD perpendicolare alla AC (11.I.) e giungansi le AD, DC.

Ed essendo retto l' angolo ADC nel semicerchio (31.III.); perciò nel triangolo rettangolo ADC, dall' angolo retto si è tirata la perpendicolare DB alla base: quindi sarà la DB media proporzionale tra i segmenti AB, BC di essa base (*c.*8.V.)

Adunque date due linee rette AB, BC, si è trovata tra esse la media proporzionale DB. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

I parallelogrammi uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, hanno reciprocamente proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali: e quei parallelogrammi, che hanno un angolo uguale ad

un angolo, ed i lati d'intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, sono uguali fra loro. (*v.n.*)

Sieno i parellelogrammi uguali AB, BC [*fig.14.*], i quali abbiano uguali gli angoli in B, e ponagnsi per diritto le DB, BE; saranno anche per diritto le FB, BG (15.I.): dico, ch'essi parallelogrammi AB, BC abbiano reciprocamente proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali, cioè, che stia DB a BE, come GB a BF.

Si compia il parallelogrammo FE.

E poichè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC, ed FE è un altro parallelogrammo; sarà AB ad FE, come BC ad FE (7.V.): ma il parallelogrammo AB sta all' altro FE, come DB a BE (1.VI.), e similmente il parallelogrammo BC sta allo stesso FE, come GB a BF; adunque DB sta a BE, come GB a BF (11.V.): perciò i lati de' parallelogrammi AB, BC, d' intorno agli angoli uguali, sono reciprocamente proporzionali.

Or sieno reciprocamente proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali, e sia come DB a BE, così GB a BF: dico, che il parallelogrammo AB sia uguale al parallelogrammo BC.

Imperocchè essendo DB a BE, come GB a BF, e come DB a BE, così il parallelogrammo AB all' altro FE (1.VI.), e similmente come GB a BF, così il parallelogrammo BC all' altro FE; sarà il parallelogrammo AB all' altro FE, come il parallelogrammo BC allo stesso FE (11.V.): e perciò il parallelogrammo AB è uguale all'altro BC (9. V.).

Quindi i parallelogrammi uguali *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

I triangoli uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, hanno reciprocamente proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali: e que'triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati d'intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali sono fra loro uguali. (*v.n.*)

I triangoli uguali ABC, ADE [*fig.15.*] abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l' angolo BAC uguale all' angolo DAE : dico, ch' essi abbiano reciprocamente proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali, vale a dire, che stia CA ad AD, come EA ad AB.

Si dispongano essi triangoli in modo, che CA sia per diritto con AD; sarà anche BA per diritto con AE (15.I.) : giungasi la BD.

E poichè il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, ed ABD è un altro triangolo; sarà come il triangolo CAB all'altro BAD, così il triangolo ADE allo stesso BAD (7.V.) : ma come il triangolo CAB al triangolo BAD, così sta CA ad AD (1.VI.), e come il triangolo EAD allo stesso BAD, così sta EA ad AB ; adunque come CA ad AD, così sta EA ad AB. Laonde i triangoli ABC, ADE hanno reciprocamente proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali.

Or i triangoli ABC,ADE abbiano reciprocamente proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali, vale a dire come CA ad AD, così stia EA ad AB : dico essere il triangolo ABC uguale al triangolo ADE.

Poichè, giunta come prima la BD, essendo CA ad AD, come EA ad AB, e come CA ad AD, così il triangolo ABC all' altro BAD (1.VI.), e similmente come EA ad AB, così

il triangolo EAD all' altro BAD ; sarà il triangolo ABC al triangolo BAD , come il triangolo EAD allo stesso BAD (11. V.). Per la qual cosa sarà il triangolo ABC uguale al triangolo ADE (9.V.).

E perciò i triangoli uguali *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali ; il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello , che si contiene dalle medie : e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale a quello, che si contiene dalle medie ; le quattro linee rette saranno proporzionali.

Sieno le quattro linee rette proporzionali AB, CD, E, F [*fig.16.*] , e sia come AB a CD, così E ad F : dico che il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, F sia uguale all'altro, che si contiene dalle CD , E.

Si tirino da' punti A , C le perpendicolari AG , CH alle AB , CD ; pongasi AG uguale ad F , CH uguale ad E , e si compiano i parallelogrammi BG , DH.

E poichè AB sta a CD , come E ad F ; ed è E uguale a CH, F ad AG; perciò sarà come AB a CD, così CH ad AG; e quindi i lati de' parallelogrammi BG, DH, che sono d'intorno agli angoli uguali, sono reciprocamente proporzionali. Ma quando i lati d' intorno agli angoli uguali de' parallelogrammi equiangoli sono reciprocamente proporzionali, essi sono uguali (14.VI.) ; adunque il parallelogrammo BG è uguale al parallelogrammo DH . Or il parallelogrammo rettangolo BG è quello, ch' è contenuto dalle linee rette AB, F, poichè AG è uguale ad F ; ed il parallelogrammo rettangolo DH è

contenuto dalle CD, E, essendo CH uguale ad E. Quindi il rettangolo contenuto dalle AB, F è uguale all' altro, che si contiene dalle CD, E.

Sia ora il rettangolo contenuto dalle AB,F uguale a quello, che si contiene dalle CD, E: dico, che le quattro linee rette sieno proporzionali, cioè, che stia AB a CD, come E ad F.

Fatta la stessa costruzione, poichè il rettangolo contenuto dalle AB, F è uguale all' altro, che si contiene dalle CD, E; ed il rettangolo contenuto dalle AB, F è BG, perchè AG è uguale ad F, e l' altro rettangolo contenuto dalle CD, E è DH, per essere CH uguale ad E; sarà il parallelogrammo BG uguale all' altro DH. Ma sono di più equiangoli; ed i parallelogrammi uguali, ed equiangoli hanno i lati d'intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali (14.VI.); perciò come AB a CD, così sta CH ad AG: è poi CH uguale ad E, AG ad F; adunque AB sta a CD, come E a F.

Laonde se quattro linee rette *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se tre linee rette sieno proporzionali; il rettangolo contenuto dalle estreme sarà uguale al quadrato, che si descrive alla media: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato descritto dalla media; le tre linee rette saranno proporzionali.

Sieno le tre linee rette proporzionali A, B, C [*fig.* 17.]; e stia come A a B, così B a C: dico che il rettangolo contenuto dalle A, C sia uguale al quadrato, che si descrive dalla media B.

Si ponga D uguale a B. Ed essendo A a B, come B a C, e B uguale a D; sarà A a B, come D a C ((7.V.)): ma se quattro linee rette sono proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie (16. VI.); adunque il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale a quello, che si contiene dalle B, D. Or il rettangolo contenuto dalle B, D è uguale al quadrato di B, poichè B è uguale a D; perciò anche il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato di B.

Sia ora il rettangolo contenuto dalle A, C uguale al quadrato, che si descrive dalla B: dico, che come A a B, così stia B a C.

Fatta la stessa costruzione: poichè il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato di B; ed il quadrato di B è lo stesso, che il rettangolo contenuto dalle B, D, perchè B è uguale a D; sarà il rettangolo contenuto dalle A, C uguale a quello, che si contiene dalle B, D. Ma se il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie, le quattro linee rette sono proporzionali (16.VI.); quindi come A a B, così sta D a C. Ed è B uguale a D: laonde come A a B, così sta B a C.

Adunque se tre linee rette sieno proporzionali *ec.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA.

Descrivere da una data linea retta un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato. (*V. N.*)

Sia data la linea retta AB [*fig. 18.*] , e dato anche il rettilineo CDEFG ; fa d' uopo descrivere dalla linea retta AB un rettilineo simile , e similmente posto al rettilineo dato CDEFG .

Si divida il rettilineo CDEFG in triangoli, per mezzo delle DG , DF , o poi alla linea retta AB , ne' punti A , B in essa , si costituisca l' angolo BAH uguale all' angolo in C (23. I.) , e l' angolo ABH uguale all' angolo CDG ; sarà il terzo angolo CGD uguale al terzo angolo AHB (32.I) : che però il triangolo CGD è equiangolo all' altro AHB . Similmente si costituiscano alla linea retta BH , ch' è un lato del triangolo ABH omologo all' altro DG del triangolo CDG , ne' punti H, B in essa, l'angolo BHK uguale all'angolo DGF, e l' angolo HBK uguale all' altro GDF ; sarà il terzo angolo in K uguale al terzo angolo in F : onde il triangolo BHK è pure equiangolo al triangolo DGF. In seguito alla linea retta BK , ch' è un lato del triangolo BHK omologo al lato DF del triangolo DGF , ne' punti K , B in essa , si costituisca l' angolo BKL uguale all' angolo DFE , e l' angolo KBL uguale all' altro FDE; sarà il terzo angolo in L uguale al terzo in E , ed il triangolo BKL equiangolo all' altro DFE. E così continuisi a fare , se nel rettilineo CDEFG sieno altri triangoli . Or essendo l' angolo AHB uguale all angolo CGD, e l'angolo BHK all' angolo DGF ; sarà tutto l' angolo AHK uguale a tutto l' altro CGF : e per la stessa ragione l' angolo HKL è uguale all' angolo GFE . Di più l' angolo ABH è

uguale all' angolo CDG , l' angolo HBK all' angolo GDF , e l' angolo KBL all' altro FDE ; quindi tutto l' angolo ABL è uguale a tutto l' angolo CDE : sono ancora gli angoli in A, ed in L uguali respettivamente a quelli in C, ed in E; adunque il rettilineo ABLKH è equiangolo all'altro CDEFG. Ma di più questi rettilinei hanno proporzianali i lati d'intorno agli angoli uguali ; poichè essendo simili i triangoli BAH , DCG , sta BA ad AH , come DC a CG, ed AH ad HB , come CG a GD (*d*.1.VI.) ; ed è poi anche BH ad HK , come DG a GF , perchè sono pur simili i triangoli BHK , DGF ; quindi,per egualità, sarà AH ad HK,come CG a GF (22.V). Similmente si dimostrerà HK a KL , come GF ad FE. In oltre pe' triangoli simili KLB , FED , sta KL ad LB , come FE ad ED, ed LB a BK, come ED a DF: ed è anche KB a BH , come FD a DG , per gli altri triangoli simili KBH , FDG , come pure HB a BA , come GD a DC , per esser simili i triangoli HBA, GDC ; adunque le quattro linee rette LB , BK , BH , BA sono in ordinata ragione con le quattro altre ED , DF , DG , DC ; e però, per egualità ordinata , dovrà essere LB a BA , come ED a DC (22.V.). Adunque i rettilinei ABLKH, e CDEFG, che si erano già dimostrati equiangoli , hanno anche proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali ; e perciò sono simili (*d*.1.VI.).

Laonde si è descrirto da una linea retta data un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

I triangoli simili sono in ragion duplicata di quella, che hanno i lati omologhi fra loro.

Sieno i triangoli simili ABC, DEF [*fig. 19.*] , e sia l' angolo in B uguale a quello in E, ed AB a BC , come DE ad EF, in modo tale, che il lato BC sia omologo al lato EF : dico , che il triangolo ABC stia al triangolo DEF in ragion duplicata di quella, che ha BC ad EF.

Si trovi in ordine alle BC, EF la terza proporzionale BG (11.VI.), sicchè sia BC ad EF, come EF a BG, e giungasi GA. E perchè come AB a BC, così sta DE ad EF, e queste grandezze sono omogenee; sarà, permutando, come AB a DE, così BC ad EF (16.V.) . Ma come BC ad EF , così sta EF e BG; adunque AB sta a DE, come EF a BG (11.V.); che però ne' triangoli ABG,DEC sono reciprocamente porporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali. Or que'triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo , ed i lati d' intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali , sono uguali (15.VI.) ; adunque il triangolo ABG è uguale al triangolo DEC. Ed essendo BC ad EF, come EF a BG; e perchè se tre linee rette sono proporzionali , la prima dicesi avere alla terza ragion duplicata di quella, che ha la prima alla seconda (*d.*10.V.) ; avrà perciò BC a BG ragion duplicata di BC ad EF : è poi come BC a BG , così il triangolo ABC al triangolo ABG (1. VI.) ; avrà dunque il triangolo ABC al triangolo ABG ragion duplicata di quella , che BC ha ad EF. Per la qual cosa essendo il triangolo ABG uguale al triangolo DEF ; anche il triangolo ABC serberà al triangolo DEF ragion duplicata di quella , che la BC ha alla EF.

Quindi i triangoli simili *ec.* — *C. B. D.*

COR. Da ciò rilevasi chiaramente, che: *Se tre linee rette sieno proporzionali, come la prima alla terza, così starà il triangolo descritto dalla prima al triangolo simile, e similmente posto, che si descrive dalla seconda.*

Poichè si è dimostrato, che stia BC a BG, come il triangolo ABC al triangolo DEF.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

I poligoni simili si dividono in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi a' tutti; e l'un poligono sta all'altro in ragion duplicata di quella, che ha un lato al suo omologo.

Sieno i poligoni simili ABCDE, FGHKL [*fig. 20.*], e sia il lato AB omologo all'altro FG: dico, che i poligoni ABCDE, FGHKL si dividano in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi a' tutti; e che il poligono ABCDE stia all' altro FGHKL in ragion duplicata di quella, che ha AB ad FG.

Giungansi le EB, EC, LG, LH.

Ed essendo il poligono ABCDE simile all' altro FGHKL, l' angolo BAE sarà uguale all' angolo GFL (*d.*1.VI.): ma è pure BA ad AE, come GF ad FL; perciò avendo i due triangoli ABE, FGL un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati d' intorno a questi angoli uguali, sarà il triangolo ABE equiangolo all' altro FGL, e per conseguenza simile (6.VI.). Quindi l' angolo ABE è uguale all' angolo FGL: ed è tutto l' angolo ABC uguale a tutto l' altro FGH, per la similitudine de' poligoni; adunque il rimanente angolo EBC è uguale al rimanente LGH. Or siccome per esser simili i triangoli ABE, FGL sta EB a BA, come LG a GF (*d.*1.VI.): ed è poi, per la similitudine de' poligo-

ni, AB a BC, come FG a GH; così sarà, per egualità, EB a BC, come LG a GH. Laonde i triangoli BEC, GLH avendo proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali EBC, LGH; saranno equiangoli, e perciò simili. Per la stessa ragione il triangolo ECD è simile all'altro LHK; adunque i poligoni simili ABCDE, FGHKL si dividono in triangoli simili, ed uguali in numero.

Dico, che questi sieno omologhi a' tutti, cioè ch' essi triangoli sieno proporzionali fra loro, ed a tutt' i poligoni, e che sieno ABE, EBC, ECD gli antecedenti, ed FGL, LGH, LHK i respettivi conseguenti; e che il poligono ABCDE stia all'altro FGHKL in ragion duplicata di quella, che ha un lato al suo omologo, cioè di AB ad FG.

Poichè il triangolo ABE è simile al triangolo FGL, perciò avrà il triangolo ABE al triangolo FGL ragion duplicata di quella, che ha la BE alla GL (19.VI). Per la stessa ragione anche il triangolo BEC sta al triangolo GLH in ragion duplicata di quella, che ha la BE alla GL; quindi come il triangolo ABE al triangolo FGL, così sta il triangolo BEC al triangolo GLH (11.V.). Similmente, poichè il triangolo EBC è simile al triangolo LGH, avrà il triangolo EBC al triangolo LGH ragion duplicata di quella, che la linea retta CE ha all'altra HL: ma per la stessa ragione anche il triangolo ECD sta al triangolo LHK in ragion duplicata di quella, che la CE ha alla HL; quindi come il triangolo EBC al triangolo LGH, così sta il triangolo ECD al triangolo LHK. Si è poi dimostrato, che come il triangolo EBC al triangolo LGH, così stia il triangolo ABE al triangolo FGL; perciò come il triangolo ABE al triangolo FGL, così sta il triangolo EBC all'altro EGH, ed il triangolo ECD all' altro LHK. Ma come un antecedente al suo conseguente, così tutti gli antecedenti a tutt' i conseguenti (12.V.); quindi il triangolo ABE starà al triangolo FGL, come il poligono ABCDE al poligono FGHKL. Or il triangolo ABE sta al triangolo FGL in ragion

duplicata di qnella, che ha il lato AB all'omologo FG, mentre i triangoli simili sono in ragion duplicata di qnella de' loro lati omologhi (19.VI.). Adunque anche il poligono ABCDE starà al poligono FGHKL in ragion duplicata di qnella del lato AB all' omologo FG.

Laonde i poligoni simili *ec.* — *C.B.D.*

Cor. 1. Nel modo stesso si dimostrerà pe' quadrilateri simili, ch'essi sieno in duplicata ragione di quella de' loro lati omologhi: ed essendosi ciò anche dimostrato pe' triangoli simili (19.VI.), ne segue generalmente, che:

Le figure rettilinee simili sono in duplicata ragione di quella de' loro lati omologhi. (r.n.)

Cor. 2. Or se ritrovisi la terza proporzionale X in ordine alle dne AB,FG; starà AB ad X in ragion duplicata di qnella, che ha AB ad FG (*d.*10.VI.): ma sta pure il poligono, che ha per lato AB al poligono simile, che ha per lato omologo FG, ed il quadrilatero al quadrilatero in ragion duplicata di qnella di un lato all' altro omologo, cioè di AB ad FG (*cor.*1.20.VI.); adunqne come AB ad X, così sta la figura rettilinea, che ha per lato AB all' altra, che ha per lato omologo FG. Lo stesso si è anche dimostrato pe' triangoli (*cor.*19.VI.). Perciò generalmente:

Se tre linee rette sieno proporzionali, come la prima alla terza, così sta la figura rettilinea descritta dalla prima all' altra simile, e similmente posta, che si descrive dalla seconda.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

I rettilinei simili ad uno stesso rettilineo, sono anche simili fra loro.

Sia l' uno, e l' altro de' rettilinei A, B [*fig.21.*] simile al rettilineo C: dico, che il rettilineo A sia anche simile al rettilineo B.

Perchè il rettilineo A è simile all'altro C, gli sarà equiangolo, ed essi avranno proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali (*d.*1.VI.). Similmente poichè il rettilineo B è simile all'altro C, gli sarà equiangolo, ed essi avranno porporzionali i lati d' intorno agli angoli. Adunque ciascuno de' rettilinei, A,B è equiangolo all'altro C, ed ha con questo proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali; perciò il rettilineo A è equiangolo all' altro B, ed ha con questo anche proporzionali i lati d' intorno agli angoli uguali (11.V.).

Quindi A è simile a B. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali; anche i rettilinei simili, e similmente posti, che si descrivono da esse, saranno proporzionali: e se i rettilinei simili, e similmente posti i quali si descrivono da quattro linee sieno proporzionali; anche tali linee rette saranno proporzionali.(*V.N.*)

Sieno le quattro linee rette proporzionali AB,CD [*fig.22*], EF, GH, cioè come AB a CD, così stia EF a GH, e dalle

AB , CD si descrivano i rettilinei simili, e similmente posti KAB, LCD, e dalle altre EF, GH si descrivano pure i rettilinei simili , e similmente posti MF, NH : dico, che come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così stia il rettilineo MF all' altro NH.

Si trovi in ordine alle AB , CD la terza proporzionale X (11.VI.), ed in ordine alle EF, GH la terza proporzionale O.

E poichè sta AB a CD , come EF a GH , sarà anche CD ad X, come GH ad O (11. V.) ; quindi , per egualità, come AB ad X , così starà EF ad O (22.V.). Ma come AB ad X , così sta il rettilineo KAB all' altro LCD (*cor.*2.20.VI.) ; e come EF ad O, così è pure il rettilineo MF all' altro NH. Adunque come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così sta il rettilineo MF all'altro NH (11.V.) .

Sia ora come il rettilineo KAB al rettilineo LCD , così il rettilineo MF all'altro NH : dico, che come AB a CD, così stia EF a GH.

Si faccia come AB a CD , così EF a PR (12.VI.), e descrivasi dalla PR il rettilineo SR simile, e similmente posto all' altro MF, o pure ad NH (18.VI.)

E poichè come AB a CD, così sta EF a PR, e dalle AB,CD si sono descritti i rettilinei simili , e similmente posti KAB, LCD, e dalle EF,PR gli altri rettilinei anche simili, e similmente posti MF , SR ; perciò sarà come il rettilineo KAB al rettilineo LCD , così il rettilineo MF all' altro SR . Ma si è supposto, che il rettilineo KAB stia all' altro LCD , come il rettilineo MF all'altro NH; perciò il rettilineo MF sta al rettilineo NH, come lo stesso MF all'altro SR . Per lo che avendo il rettilineo MF a ciascuno degli altri NH,SR la stessa ragione; sarà il rettilineo NH uguale all'altro SR (9.V.): ma gli è anche simile, e similmente posto; adunque GH è uguale a PR . E perchè come AB a CD, così sta EF a PR, e PR è uguale a GH ; sarà perciò come AB a CD , così EF a GH.

Se dunque quattro linee rette *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

I parallelogrammi equiangoli hanno fra loro ragione composta dalle ragioni de' lati.(*V.N.*)

Sieno i parallelogrammi equiangoli AC, CF [*fig.23.*], che abbiano l' angolo BCD uguale all'angolo ECG : dico, che il parallelogrammo AC stia all' altro CF in ragion composta dalle ragioni di BC a CG, e di DC a CE.

Pongasi BC per diritto con CG; sarà ancora DC per diritto con CE (15.I.) : si compisca il parallelogrammo DG. Ciò posto, si esponga una qualunque linea retta K, e poi si faccia come BC a CG, così K ad L, e come DC a CE, così L ad M (12.VI.) ; saranno le ragioni di K ad L, e di L ad M le stesse, che quelle de' lati, cioè di BC a CG, e di DC a CE. Ma la ragione di K ad M è composta dalla ragione di K ad L, e dall'altra di L ad M (*d.*A.V.); perciò K ad M ha una ragione composta dalle ragioni de' lati. Or poichè sta come BC a CG, così il parallelogrammo AC all' altro CH (1.VI), e come BC a CG, così K ad L ; perciò come K ad L, così starà il parallelogrammo AC all' altro CH (11.V.) . Similmente essendo come DC a CE, così il parallelogrammo CH all' altro CF, e come DC a CE, così sta L ad M ; perciò starà come L ad M, così il parallelogrammo CH all' altro CF . Per lo che essendosi già dimostrato essere K ad L, come il parallelogrammo AC all' altro CH, per egualità, starà come K ad M, così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF (22. V.) : è poi la ragione di K ad M composta da quelle de' lati; laonde sarà anche il parallelogrammo AC all' altro CF in ragion composta dalle ragioni de' loro lati.

E perciò i parallelogrammi *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

I parallelogrammi, che sono d'intorno al diametro di ogni parallelogrammo, sono simili al tutto, e fra loro.

Sia il parallelogrammo ABCD [*fig.24.*], il cui diametro sia AC, ed intorno al diametro AC sieno i parallelogrammi EG,HK: dico, che questi parallelogrammi EG,HK sieno simili a tutto ABCD, e fra loro.

Poichè le CD, GF sono parallele; sarà l'angolo ADC uguale all'angolo AGF (29.I.): e per la stessa ragione, essendo parallele le BC, EF; sarà l'angolo ABC uguale all'altro AEF. Ma l'uno, e l'altro degli angoli BCD, EFG è uguale all'opposto DAB (34.I.), che però essi sono anche fra loro uguali; adunque i parallelogrammi ABCD, AEFG sono equiangoli. Or perchè l'angolo ABC è uguale all'angolo AEF, e l'angolo BAC è comune a' due triangoli BAC,EAF, perciò questi saranno equiangoli fra loro (32.I.); e quindi come AB a BC, così sta AE ad EF (4.VI.): ma i lati opposti de' parallelogrammi sono uguali (34.I.); onde sarà pure AB ad AD, come AE ad AG, DC a CB, come GF ad FE, ed inoltre CD a DA, come FG a GA. Adunque ne' parallelogrammi ABCD,AEFG sono proporzionali i lati d'intorno agli angoli uguali; e perciò il parallelogrammo ABCD è simile all'altro AEFG (*d.*1.VI.). Per la stessa ragione il parallelogrammo ABCD è simile al parallelogrammo FHCK; quindi ciascuno de'due parallelologrammi EG,HK è simile allo stesso parallelogrammo ABCD. Ma que' rettilinei, che sono simili ad uno stesso rettilineo, sono anche simili fra loro (21.VI.); laonde il parallelogrammo EG è simile all'altro HK. E perciò i parallelogrammi *cc.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Costituire un rettilineo simile ad un dato, ed uguale ad altro dato.

Sia dato il rettilineo ABC [*fig.25.*], cui bisogna costituire un altro simile, e D sia quello al quale qnesto dev' essere uguale; fa d'uopo costituirc un rettilineo simile ad ABC, ed uguale a D.

Si applichi alla linea retta BC il parallelogrammo BE ugnale al rettilineo ABC (*c*.45.I.), e poi alla linea retta CE, nell'angolo FCE, che sia ugnale a CBL, si applichi il parallelogrammo EF uguale al rettilineo D; sarà BC per diritto con CF, ed LE con EM. Si trovi fra le BC, CF la media proporzionale GH (13.VI.), dalla quale si descriva il rettilineo KGH simile, e similmente posto al rettilineo ABC (18.VI.).

E poichè BC sta a GH, come GH a CF; e se tre linee rette sono proporzionali, come la prima alla terza, così sta la figura rettilinea, che si descrive dalla prima all' altra simile, e similmente posta, che si descrive dalla seconda (*c*.2. 20.VI.); perciò come BC a CF, così starà il rettilineo ABC al rettilineo KGH. Ma come BC a CF, così sta il parallelogrammo BE all' altro EF (1.VI.); adunqne come il rettilineo ABC all'altro KGH, così sta il parallelogrammo BE all' altro EF. Per la qual cosa essendo il rettilineo ABC nguale al parallelogrammo BE; sarà ancora il rettilineo KCH uguale al parallelogrammo EF (14.V.). Ma il parallelogrammo EF è uguale al rettilineo D; adunqne anche il rettilineo HGH sarà uguale all' altro D: ed è poi esso KHG simile al rettilinco ABC.

Perciò si è costitnito un rettilineo simile al dato ABC, ed uguale all' altro dato D. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Se da un parallelogrammo si tolga un altro parallelogrammo simile, e similmente posto al tutto, che abbia con esso un angolo comune; consisterà quello col tutto intorno al diametro stesso.

Dal parallelogrammo ABCD [*fig.26.*] si tolga il parallelogrammo AEFG simile, e similmente posto ad ABCD, e che abbia comune con esso l' angolo BAD : dico, che il parallelogrammo ABCD consista coll' altro AEFG intorno al diametro stesso.

Imperocchè non vi stia ; ma s' è possibile , sia AHC il diametro di ABCD , e GF incontri AHC nel punto H , pel quale si tiri ad AD, ovvero a BC la parallela HK(31.I.). Or consistendo il parallelogrammo ABCD coll' altro KG intorno al diametro stesso; sarà il parallelogrammo ABCD simile all'altro KG (24.VI.); e perciò AD sta ad AB , come GA ad AK (*d.*1.VI.) : ma per la similitudine de' parallelogrammi ABCD, AEFG, sta AD ad AB, come AG ad AE ; adunque AG sta ad AE , come AG ad AK (11.V.) . Per lo che serbando AG la stessa ragione a ciascuna delle AK , AE, sarà AE uguale ad AK (9.V.) : la minore alla maggiore, che non può essere. Quindi il parallelogrammo ABCD non consiste intorno allo stesso diametro col parallelogrammo AKHG; e perciò sarà quello intorno allo stesso diametro coll'altro AEFG.

Adunque se da un parallelogrammo *ec.* — *C.B.D.*

N. B. Se la linea retta AB si divida comunque in E [*fig.a n.1.e 2.*], indi si descriva dalla BE un parallelogrammo BF simile al dato D , e si compia l' intero parallelogrammo AC ; il parallelogrammo AF si dirà *parallelogrammo applicato alla linea retta AB deficiente di una figura*

parallelogramma simile alla data D. Al contrario se la AB si fosse prolungata in *e*, e poi dalla B*e* si fosse descritto il parallelogrammo B*f* simile al dato D, compito l' intero parallelogrammo A*f*, questo si direbbe *parallelogrammo applicato alla linea retta AB eccedente di una figura parallelogramma simile alla data D.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

De' parallelogrammi applicati ad una medesima linea retta, deficienti di figure parallelogramme simili, e similmente poste a quella, che si descrive dalla metà, il massimo è quello descritto dalla metà stessa, e ch' è simile al difetto.

Sia la linea retta AB, la quale dividasi per metà in C, ed alla AB si applichi il parallelogrammo AD [*fig.27.n.1.e 2.*], deficiente di una figura parallelogramma simile, e similmente posta a quella CE, che si è descritta dalla CB metà di essa AB: dico, che di tutt' i parallelogrammi applicati alla linea retta AB, deficienti di figure parallelogramme simili, e similmente poste ad essa CE, il massimo sia AD.

Imperocchè si applichi alla stessa AB l' altro parallelogrammo AF, deficiente della figura parallelogramma KH simile, e similmente posta alla CE: dico, che il parallelogrammo AD sia maggiore dell' altro AF.

Primieramente la linea retta AK [*fig.27.n.1.*], base del parallelogrammo AF, sia maggiore di AC. Ed essendo il parallelogrammo CE simile all' altro KH, consisteranno intorno al diametro stesso (26.VI.): si tiri perciò il loro diametro DB, e si compia la figura. Or essendo CF uguale ad EF (43. I.), aggiunto comune KH; sarà tutto CH uguale a tutto KE: ma CH è uguale a CG, mentre la linea retta

AC è uguale all' altra CB (36.I.) ; laonde sarà anche CG uguale a KE, per cui aggiugnendo comune CF, tutto AF sarà uguale allo gnomone LHKM ; e perciò il parallelogrammo CE, o sia AD è maggiore dell' altro AF.

In secondo luogo la linea retta AK [*fig.27.n.2.*] , base di AF, sia minore di AC . Fatto lo stesso apparecchio , poichè il parallelogrammo DH è uguale all' altro DG , essendo DH uguale ad MG (36.I.); perciò sarà DH maggiore di LG: ma DH è uguale a DK (43.I.) ; quindi sarà DK maggiore di LG , ed aggiunto comune AL , sarà tutto AD maggiore di tutto AF .

Adunque di tutt' i parallelogrammi , *cc.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA.

Applicare ad una linea retta data un parallelogrammo uguale ad un rettilineo dato, deficiente di una figura parallelogramma simile ad altra data; fa però d' uopo, che il dato rettilineo cui dee esser uguale il parallelogrammo da applicarsi non sia maggiore dell'altro, che applicasi alla metà della linea retta data , supposto che i difetti di questi due parallelogrammi applicati sieno simili fra loro , ed all' altro parallelogrammo dato. (*V.N.*)

Sia data la linea retta AB [*fig. 28.*] , e quel rettilineo cui bisogna applicarne uno uguale nella linea retta data AB sia C, non maggiore del parallelogrammo applicato alla metà di AB, essendo le deficienze di quel parallelogrammo , e di questo simili al parallelogrammo dato D : si dee applicare alla linea retta data AB un parallelogrammo uguale a quel rettili-

neo C, deficiente di una figura parallelogramma simile a D.

Si divida la AB per metà in E (10.I.), dalla EB descrivasi un parallelogrammo simile, e similmente posto a D, il quale sia EBFG (18.I.), e si compia il parallelogrammo AG. È chiaro, per la determinazione *, che AG o è uguale a C, ovvero maggiore (27.VI). Or se AG sia uguale a C, sarà fatto ciò che proponevasi; poichè si sarà già applicato alla linea retta AB un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C, deficiente di una figura parallelogramma EF simile a D. Se poi non gli è uguale, sarà HE maggiore di C (27.VI.): ma HE è uguale ad EF; adunque anche EF è maggiore di C. Si costituisca il parallelogrammo KLMN simile, e similmente posto a D, ed uguale all' eccesso di EF su C (25. VI.) **; e perchè D è simile ad EF, sarà anche KM simile ad EF (21.VI). Sia ora la linea retta KL omologa alla GE, e la LM alla GF. E poichè EF è uguale a C, e KM insieme; sarà EF maggiore di KM: perciò la linea retta GE è maggiore della KL, e la GF della LM. Pongasi GX uguale a KL, GO uguale ad LM, e compiscasi il parallelogrammo GOPX; sarà OX uguale, e simile a KM: ma KM è simile ad EF; quindi anche OX è simile ad EF, e però consistono intorno al diametro stesso (26. VI.). Sia GPB tal diametro, e descrivasi la figura. E perchè EF è uguale a C, e KM insieme, ed OX è uguale a KM; sarà il rimanente gnomone ORSX u-

* Cioè per la condizione, che determina il limite in più per la grandezza del rettilineo dato, assegnata nell' enunciazione del problema, a fin di renderlo possibile.

** Per avere tale eccesso basterà, che ad un lato del parallelogrammo EF, in un angolo ad esso adjacente, si applichi un parallelogrammo uguale al rettilineo C; l'eccesso di quel parallelogrammo su questo sarà il cercato. E se quel parallelogrammo fosse stato applicato in un angolo conseguente all' un degli adjacenti a tal lato; il parallelogrammo risultante dall' insieme di questo, e del proposto sarebbe stato la loro somma.

guale al rimanente rettilineo C. Or essendo OR uguale ad EP (43.I.), aggiunto comune SR, tutto OB sarà uguale a tutto BX : ma BX è uguale ad ET, poichè il lato AE è uguale al lato EB (36. I.). Adunque ancora TE è uguale ad OB : aggiunto comune PE, sarà tutto TS uguale allo gnomone ORSX, che si è dimostrato uguale a C. Laonde anche TS sarà uguale a C.

E perciò si è applicato alla data linea retta AB il parallelogrammo TS uguale al dato rettilineo C, deficiente della figura parallelogramma SR simile all' altra data D, mentre SR è simile ad EF (24.VI.). — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Applicare ad una linea retta data un parallelogrammo uguale ad un rettilineo dato, eccedente di una figura parallelogramma simile ad altra data. (*V.N.*)

Sia la linea retta AB [*fig. 29.*], e sia C il rettilineo cui bisogna applicar l' uguale nella AB, quello poi cui dee esser simile l' eccesso sia D ; bisogna applicare alla AB un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C, eccedente di una figura parallelogramma simile a D.

Si divida la AB per metà in E, dalla EB descrivasi il parallelogrammo EL simile, e similmente posto a D (18.VI.), e poi si costituisca l' altro parallelogrammo GH simile, e similmente posto a D, ed uguale ad EL, e C insieme (25.VI.)*.

È dunque GH simile ad EL (21.VI.), e sia in essi il lato KH omologo al lato FL, e KG ad FE. E poichè il paralle-

* Vegg. la noterella a piè della pag. 213.

logrammo GH è maggiore del parallelogrammo EL; sarà la linea retta KH maggiore di FL, e KG maggiore di FE: si proluaghino le FL, FE, e sia FLM uguale a KH, ed FEN uguale a KG; poi compiasi il parallelogrammo MN, il quale sarà uguale a GH: ma GH è simile ad EL; quindi anche MN sarà simile ad EL, e perciò MN, ed EL coasistono intorno al diametro stesso (26.VI.). Si tiri questo loro diametro comune FBX, e descrivasi la figura. Ed essendo GH uguale ad MN; sarà anche MN uguale ad EL, e C insieme: per lo che tolto comune EL, il rimaneate gnomoae LOPE sarà uguale a C. Or perchè AE è uguale ad EB, il parallelogrammo AN è uguale al parallelogrammo NB (36. I.), cioè ad LO (43.I.); quindi se aggiungasi comune EX, sarà tutto AX uguale allo gnomone LOPE: ma questo gnomone è uguale a C; laonde anche AX sarà uguale a C.

E perciò si è applicato alla data linea retta AB il parallelogrammo AX uguale al dato rettilineo C, eccedente della figura parallelogramma PO, ch'è simile a D, mentre PO è simile ad EL — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Dividere una data linea retta terminata in estrema, e media ragione. (*V.N.*)

Sia data la linea retta termiaata AB [*fig.30.n.1.*] ; fa d' uopo dividerla ia estrema, e media ragione.

Descrivasi dalla linea retta AB il quadrato CB (46.I.), e poi si applichi alla AC un parallelogrammo CD uguale a BC, eccedente di una figura AD simile a BC (29. VI.); che perciò un tal eccesso AD sarà un quadrato al pari di BC.

E perchè BC è uguale a CD; togliendo comune CE, sa-

rà il rimanente BF uguale al rimanente AD : gli è pure equiangolo ; adunque i lati di essi BF , AD , che sono intorno agli angoli uguali, saranno reciprocamente proporzionali (14.VI.) ; e perciò come FE ad ED, così sta AE ad EB. Ma FE è uguale ad AC , o sia ad AB , ed ED ad AE (34.I.) ; quindi come BA ad AE, così sta AE ad EB : ed è AB maggiore di AE, onde anche AE è maggiore di EB (14.V.).

Adunque si è divisa la linea retta data AB in estrema , e media ragione in E ; ed il maggior segmento di essa è AE. — *C. B. F.*

ALTRIMENTI.

Sia data la linea retta AB [*fig.30.n.2.*] ; fa d' uopo dividerla in estrema , e media ragione.

Si divida la AB in C, in modo, che il rettangolo contenuto dalle AB, BC sia uguale al quadrato della AC (11.II.) .

Ed essendo il rettangolo di AB , BC uguale al quadrato della AC; sarà BA ad AC, come AC a CB (17.VI.).

Quindi la linea retta AB si è divisa in estrema, e media ragione nel punto C. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli , la figura rettilinea , che descrivesi dal lato , che sottende l' angolo retto , è uguale alle simili , e similmente descritte da' lati , che contengono un tal angolo. (*V.N.*)

Sia il triangolo rettangolo ABC [*fig.31.*],che ha retto l'angolo BAC : dico la figura rettilinea , che si descrive dal lato

BC, essere uguale alle simili, e similmente poste, che descrivonsi da' lati BA, AC.

Si tiri la perpendicolare AD.

E perchè nel triangolo rettangolo ABC, dall' angolo retto ch' è in A, si è tirata alla base BC la perpendicolare AD; sarà CB a BA, come BA a BD (*cor.*8.V.). Il perchè essendo queste tre linee rette proporzionali, starà come la prima alla terza, così la figura descritta dalla prima alla simile, e similmente descritta dalla seconda (*cor.*2.20.VI.); e perciò come CB a BD, così starà la figura descritta dalla CB alla simile, e similmente descritta dalla AB: ed invertendo starà DB a BC, come la figura descritta dalla BA a quella che descrivesi dalla BC. Per la stessa ragione, come DC a CB, così sta la figura, che si descrive dalla AC a quella, che si descrive dalla CB. Laonde le BD, DC staranno alla BC, come le figure descritte dalle BA, AC a quella, che si descrive dalla BC, essendo esse simili, e similmente poste. Ma la BC è uguale alle BD, DC; adunque anche la figura, che si descrive dalla BC è uguale alle simili, e similmante descritte dalle BA, AC.

E perciò ne' triangoli *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se due triangoli, che hanno due lati proporzionali a due lati, componendosi cogli angoli adjacenti alle loro basi, abbiano i lati omologhi paralleli; le basi giaceranno per diritto.

Sieno i due triangoli ABC, DCE [*fig.32.*], i quali abbiano i due lati BA, AC proporzionali a' due altri CD, DE, in modo tale, che stia BA ad AC, come CD a DE; e sia in ol-

tre la AB parallela alla DC, e la AC alla DE : dico, che la BC stia per diritto con la CE.

Poichè la AB è parallela alla DC, e cade in esse la AC; saranno uguali fra loro gli angoli BAC, ACD (29.I.). Per la stessa ragione anche l'angolo CDE è uguale all'angolo ACD; sarà dunque l'angolo BAC uguale all' altro CDE. Or i due triangoli ABC, DCE, avendo l' angolo, ch'è in A uguale a quello, ch'è in D, e proporzionali i lati d' intorno a questi angoli uguali, poichè BA sta ad AC, come CD a DE; sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo DCE (6.VI.); e quindi l'angolo ABC è uguale all' angolo DCE. Si è anche dimostrato l' angolo ACD uguale all' angolo BAC; perciò tutto l' angolo ACE è uguale a'due ABC, BAC : si aggiunga comune ACB; saranno gli angoli ACE, ACB uguali agli altri BAC, ACB, CBA. Ma gli angoli ABC, ACB, CBA fanno due retti (32. I.); quindi anche gli angoli ACE, ACB saranno uguali a due retti. Laonde ad una linea retta AC, e nel punto C in essa, le due linee rette BC, CE, non poste alle parti stesse, facendo gli angoli ACE, ACB uguali a due retti; sarà BC per diritto con CE (14.I.).

E perciò se due triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli hanno la stessa ragione degli archi su i quali insistono, sieno essi a'centri, o alle circonferenze. Ed è questa anche la ragione de' settori.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.33.*], e gli angoli BGC, EHF stiano a' loro centri, gli altri BAC, EDF alle

circonferenze: dico, che come l'arco BC all'arco EF, così stia l'angolo BGC all'altro EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF; ed ancora il settore GBC al settore HEF.

Ponghansi uguali all' arco BC quanti si vogliano archi successivi CK, KL; e similmente all' arco EF si facciano uguali gli altri FM, MN quanti si vogliano, e giungansi le GK, GL, HM, HN.

Ed essendo uguali gli archi BC, CK, KL, anche gli angoli BGC, CGK, KGL saranno uguali (27.III.); e perciò quanto è moltiplice l' arco BL dell' arco BC, altrettanto l' angolo BGL l' è dell' angolo BGC. Per la stessa ragione quanto è moltiplice l' arco EN dell' arco EF, altrettanto l'angolo EHN l'è dell'angolo EHF. Or è chiaro, che se l'arco BL è uguale all' arco EN, l' angolo BGL sarà uguale all'angolo EHN; se l' arco BL è maggiore dell'arco EN, l'angolo BGL sarà maggiore dell'angolo EHN; e se minore, minore. Sono dunque quattro grandezze, cioè i due archi BC, EF, ed i due angoli BGC, EHF, e si sono presi gli equimoltiplici dell'arco BC, e dell' angolo BGC, cioè l' arco BL, e l' angolo BGL, e dell' arco EF, e dell' angolo EHF, si sono anche presi gli equimoltiplici, che sono l' arco EN, e l' angolo EHN; e si è dimostrato, che se l' arco BL è maggiore dell' arco EN, l' angolo BGL è maggiore dell' angolo EHN; e se uguale, uguale; se minore, minore. Adunque dee stare l' arco BC all' altro EF, come l' angolo BGC all' angolo EHF (*d*.5.V.). Ma l' angolo BGC sta all' angolo EHF, come l' angolo BAC all' angolo EDF (15.V.); poichè ciascuno de' due primi è doppio del corrispondente degli altri due (20.III.): perciò come l' arco BC all' altro EF, così sta l' angolo BGC all'angolo EHF, e l' angolo BAC all' altro EDF (11.V.).

Laonde ne' cerchi uguali gli angoli hanno la stessa ragione degli archi su i quali insistono, siano essi a' centri, o alle circonferenze.

Dico inoltre, che come l' arco BC all' arco EF, così stia il settore GBC al settore HEF.

Giungansi le BC, CK, poi presi negli archi BC, CK i punti X, O, si uniscano le BX, XC, CO, OK.

E perchè le due EG, GC sono uguali alle due CG, GK, e contengono angoli uguali, sarà ancora la base BC uguale alla base CK, ed il triangolo GBC al triangolo GCK (4.I.). Or essendo l' arco BC uguale all' arco CK; sarà l'altro arco, che rimane per compiere l'intera circonferenza ABC toglien-do BC, uguale a quello, che rimane per compiere la stessa circonferenza, se da essa si tolga CK: perciò anche l'angolo BXC è uguale all' angolo COK (27.III.), e quindi il seg-mento BXC è simile all' altro COK (*d*.11.III.). Ma sono costituiti nelle linee rette uguali BC, CK, ed i segmenti si-mili di cerchio, che sono costituiti nelle linee rette uguali, sono anche uguali fra loro (24. III.); adunque il segmento BFC è uguale all' altro COX: è poi altresì il triangolo BGC uguale al triangolo CGK; quindi tutto il settore GBC sarà uguale a tutto il settore GCK. Per la stessa ragione il setto-re GKL è uguale a ciascuno degli altri GBC, GCK: laonde i tre settori GBC, GCK, GKL sono fra loro uguali. Simil-mente si dimostreranno uguali fra loro i settori HEF, HFM, HMN; perciò quanto l' arco BL è moltiplice dell' arco BC, altrettanto il settore GBL l' è del settore GBC: e nel modo stesso si dimostra, che quanto l' arco EN è moltiplice del-l' arco EF, altrettanto il settore HEN l' è del settore HEF. Or è chiaro, che se l' arco BL è uguale all' arco EN, il set-tore GBL è uguale al settore HEN; se l' arco BL è maggiore dell' arco EN, anche il settore GBL è maggiose dell' altro HEN; e se minore, minore. Sono dunque quattro grandezze, cioè i due archi BC, EF, ed i due settori GBC, HEF, e si sono presi dell' arco BC, e del settore GBC gli equimoltipli-ci, che sono l'arco BL, e'l settore GBL; come pure dell'ar-co EF, e del settore HEF si sono presi altri equimoltiplici,

che sono l' arco EN , e 'l settore HEN , e si è dimostrato , che se l' arco BL è maggiore dell' arco EN , anche il settore GBL è maggiore del settore HEN ; se è uguale , uguale ; e se minore, minore: perciò dovrà stare l'arco BC, all'arco EF, come il settore GBC al settore HEF (*d*.5.V.). — *C.B.D.*

Cor. È anche chiaro , che come il settore al settore , così stia l' angolo all' angolo.

PROPOSIZIONE A.

PROBLEMA.

Se prolungato un lato del triangolo, si divida per metà l' angolo esteriore, e la retta, che divide l' angolo seghi la base prolungata ; i segmenti di questa base prolungata, che sono tra i suoi estremi, e l' incontro di essa con quella segante, avranno fra loro la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo. E se que' segmenti della base prolungata abbiano la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo ; la retta tirata dal vertice alla sezione dividerà per metà l' angolo esteriore del triangolo. (*V.N.*)

Sia ABC un triangolo, in cui il lato BA [*fig.A.*] sia prolungato in F , e la retta DAG, che divide per metà l' angolo esteriore CAF incontri la base BC in D: dico, che dovrà stare BD a DC, come BC ad AC.

Tirisi la CE parallela alla DAG(31.I.); sarà l'angolo GAF uguale all' angolo CEA , e l' angolo CAG uguale all' angolo ACE (29. I.) ; laonde si rileverà , che sia l' angolo AEC uguale all' angolo ACE , e quindi AE uguale ad AC (6.I.). Ma essendo CE parallela ad AD dee stare , componendo ,

BD a DC, come BA ad AE (4.VI.), ed è AE uguale ad AC; quindi starà BD a DC, come BA ad AC.

Sia adesso BD a DC, come BA ad AC, e giungasi la linea retta DAG: dico, che l'angolo CAG sia uguale all'angolo GAF.

Fatta la stessa costruzione: perchè BD sta a DC, come BA ad AC, e sta pure BD a DC, come BA ad AE (2.VI.); perciò starà BA ad AC, come BA ad AE (11.V.), ed AC sarà uguale ad AE (9.V.): che perciò l'angolo AEC sarà uguale all' angolo ACE. Ma l' angolo AEC è uguale all' angolo FAG (29. I.), e l'angolo ACE all' altro CAG; adunque sarà l' angolo FAG uguale all'angolo CAG.

Laonde se prolungato *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Se dividasi per metà l' angolo di un triangolo, e la segante divida anche la base; il rettangolo contenuto da' lati del triangolo sarà uguale al rettangolo contenuto da' segmenti della base, insieme col quadrato della linea retta, che divide l' angolo per metà. (*V.N.*)

Sia il triangolo ABC [*fig.B.*], il cui angolo BAC dividasi per metà con la linea retta AD: dico, che il rettangolo di BA in AC sia uguale al rettangolo di BD in DC, insieme col quadrato di AD.

Si circoscriva il cerchio ABC al triangolo proposto (5.V.), prolunghisi la AD fino alla circonferenza in E, e si giunga la EC.

E poichè l' angolo BAD è uguale all' angolo CAE, e l' angolo ABD all' angolo AEC, essendo questi nello stesso segmento (21. III.); perciò i triangoli ABD, AEC saranno e-

quiangoli, e quindi simili (4.VI.). Laonde starà BA ad AD, come EA ad AC; ed il rettangolo di BA in AC sarà uguale a quello di EA in AD (16.VI), o sia al rettangolo di ED in DA, insieme col quadrato di DA (3.II.): ma il rettangolo di ED in DA è uguale a quello di BD in DC (35.III); quindi il rettangolo di AB in AC è uguale al rettangolo di BD in DC, insieme col quadrato di AD.

E perciò se dividasi per metà *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

Se dall' angolo di un triangolo si tiri la perpendicolare alla base; il rettangolo contenuto da' lati del triangolo, sarà uguale al rettangolo contenuto dalla perpendicolare, e dal diametro del cerchio circoscritto al triangolo. (*V.N.*)

Sia il triangolo ABC [*fig.C.*], e dall' angolo A si tiri la perpendicolare AD alla base BC: dico, che il rettangolo di BA in AC sia uguale al rettangolo di AD nel diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Si circoscriva al triangolo il cerchio ABC (5. IV.), tirisi il diametro AE, e si giunga EC.

Ed essendo l'angolo retto BDA uguale all' altro ECA anche retto, perchè posto nel semicerchio (31.III.), ed inoltre l' angolo ABD uguale all' altro AEC con cui è posto nel medesimo segmento (21.III.); perciò i triangoli ABD, AEC saranno equiangoli, e quindi simili (4.VI.). Laonde come BA ad AD, così sta EA ad AC; e per conseguenza il rettangolo di BA in AC è uguale a quello di EA in AD (16.VI.).

Adunque se dall'angolo di un triangolo *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE D.

TEOREMA.

Il rettangolo contenuto dalle diagonali di un quadrilatero iscritto nel cerchio è uguale a' due rettangoli, ciascuno contenuto da' lati opposti.(*r.n.*)

Sia ABCD [*fig.D.*] il quadrilatero iscritto nel cerchio, e giungansi le diagonali AC, DB: dico essere il rettangolo di AC in BD uguale a' due rettangoli di AB in CD, e di AD in BC.

Al punto B della AB si costituisca l' angolo ABE uguale all' altro DBC (23.I.); che perciò sarà pure l'angolo ABD uguale all' angolo EBC: è poi l'angolo BDA uguale all' angolo BCE, mentre sono nella stessa porzione di cerchio BCA (21.III.); adunque il triangolo ABD è equiangolo all'altro BCE. Laonde come BC a CE, così sta BD a DA; ed il rettangolo di BC in AD è uguale a quello di BD in CE(16.VI). In oltre poichè l'angolo ABE è uguale all'angolo DBC, è l'angolo BAE all' angolo BDC, essendo questi nella stessa porzione BADC; perciò il triangolo ABE è equiangolo al triangolo BCD. Quindi BA sta ad AE, come BD a DC; ed il rettangolo di BA in DC è uguale a quello di BD in AE. Ma il rettangolo di BC in AD si è dimostrato uguale a quello di BD in CE; adunque l' interó rettangolo di AC in BD è uguale al rettangolo di AB in DC, insieme coll' altro di AD in BC.

Adunque il rettangolo contenuto *ec.* — *C.B.D.*

Fine del sesto libro.



